



270F

270
F

نام:
نام خانوادگی:
محل امضا:

صبح جمعه
۱۳۹۵/۱۲/۶
دفترچه شماره (۱)



«اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می شود.»
امام خمینی (ره)

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
سازمان سنجش آموزش کشور

آزمون ورودی
دوره دکتری (نیمه متمرکز) داخل - سال ۱۳۹۶

رشته امتحانی ریاضی کاربردی (کد ۲۲۳۴)

تعداد سؤال: ۴۵
مدت پاسخگویی: ۱۵۰ دقیقه

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤالات

| ردیف | مواد امتحانی | تعداد سؤال | از شماره | تا شماره |
|------|--|------------|----------|----------|
| ۱ | مجموعه دروس تخصصی (مبانی آنالیز ریاضی - آنالیز ریاضی - مبانی ماتریس ها و جبر خطی - مبانی آنالیز عددی - آنالیز عددی پیشرفته - آنالیز حقیقی - تحقیق در عملیات پیشرفته ۱) | ۴۵ | ۱ | ۴۵ |

این آزمون نمره منفی دارد.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

اسفندماه - سال ۱۳۹۵

حق چاپ، تکثیر و انتشار سؤالات به هر روش الکترونیکی و ... پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می باشد و یا متخللین برابر مقررات رفتار نمی شود.

مبانی آنالیز ریاضی - آنالیز ریاضی:

۱- اگر $a, b > 1$ ، مقدار $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{\sqrt[n]{a}-1}{b})^n$ کدام است؟

(۱) ۱

(۲) $\frac{a}{b}$ (۳) e^{a-b} (۴) $\frac{1}{a^b}$

۲- فرض کنید $f: S \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی اکیداً یکنوا باشد. کدام گزینه درست است؟

(۱) باز یا بسته یا همبند بودن $f(S)$ ، پیوستگی f را نتیجه می‌دهد.(۲) باز یا بسته بودن $f(S)$ پیوستگی f را نتیجه می‌دهد ولی همبند بودن $f(S)$ پیوستگی f را نتیجه نمی‌دهد.(۳) همبند یا بسته بودن $f(S)$ پیوستگی f را نتیجه می‌دهد ولی باز بودن $f(S)$ پیوستگی f را نتیجه نمی‌دهد.(۴) باز یا همبند بودن $f(S)$ پیوستگی f را نتیجه می‌دهد ولی بسته بودن $f(S)$ پیوستگی f را نتیجه نمی‌دهد.

۳- اگر تابع $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته یکنواخت باشد، کدام گزینه درست است؟

(۱) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ هر دو موجود هستند.(۲) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ لزوماً موجود نیستند.(۳) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ موجود است ولی $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ لزوماً موجود نیست.(۴) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ موجود است ولی $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ لزوماً موجود نیست.

۴- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \sin x & x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{2}{\pi} & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$ بر $[\frac{\pi}{4}, 0]$ ، کدام گزینه درست است؟

(۱) تابع f دارای تابع اولیه است.(۲) تابع f در هیچ نقطه از $[\frac{\pi}{4}, 0]$ پیوسته نیست.(۳) انتگرال بالایی تابع f برابر یک است.(۴) تابع f در خاصیت مقدار میانی صدق نمی‌کند.

۵- فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک است. متریک ρ را روی X به صورت $\rho(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$ تعریف

می‌کنیم. کدام گزینه نادرست است؟

(۱) مترهای ρ و d معادل هستند.(۲) $E \subseteq X$ نسبت به متر ρ همبند است اگر و تنها اگر نسبت به متر d همبند باشد.(۳) $E \subseteq X$ نسبت به متر ρ فشرده است اگر و تنها اگر نسبت به متر d فشرده باشد.(۴) به ازای هر فضای متریک Y ، تابع $f: X \rightarrow Y$ نسبت به متر ρ پیوسته است اگر و تنها اگر نسبت به متر d

پیوسته باشد.

۶- اگر $C[a, b]$ فضای توابع پیوسته حقیقی مقدار روی $[a, b]$ ، $\{x_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی در $[a, b]$ و ψ_n بر $C[a, b]$ به صورت $\psi_n(f) = f(x_n)$ تعریف شود، آنگاه شرط لازم و کافی برای اینکه $\{\psi_n\}$ به طور یکنواخت همگرا باشد کدام است؟

(۱) $\{x_n\}$ همگرا باشد.

(۲) $\{x_n\}$ کراندار باشد.

(۳) $\{x_n\}$ از مرحله‌ای به بعد ثابت باشد.

(۴) $\{x_n\}$ زیر دنباله‌ای همگرا داشته باشد.

۷- فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی و همگرا به صفر باشد. $X = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \mid \text{مجهز به متر}$
 $d((a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty}) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n - b_n|$ باشد و $E = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in X \mid \forall n \in \mathbb{N}, x_n \geq 0\}$. کدام گزینه درست است؟

(۱) E همبند نیست.

(۲) $E^\circ = \emptyset$.

(۳) $E' \neq E$.

(۴) E بسته نیست.

۸- کدام گزینه شرط لازم و کافی برای فشردگی فضای متریک X نیست؟

(۱) هر تابع پیوسته حقیقی مقدار بر X اکسترمم‌های مطلق خود را اختیار می‌کند.

(۲) هر تابع پیوسته از X به یک فضای متریک Y پیوسته یکنواخت است.

(۳) هر تابع پیوسته از X به یک فضای متریک Y مجموعه‌های بسته را به مجموعه بسته می‌نگارد.

(۴) هر تابع پیوسته از X به یک فضای متریک Y کران‌دار است.

مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی:

۹- فرض کنید $G = S_6$ و $H = \{e, (12), (16), (36), (136), (163)\}$. قرار می‌دهیم $T = \langle H \rangle$. تعداد عناصر مرتبه ۲ در T برابر است با:

(۱) ۳

(۲) ۴

(۳) ۵

(۴) ۶

۱۰- فرض کنید G یک گروه است و $g \in G$. در این صورت نگاشت $I_g: G \rightarrow G$ که $I_g(x) = gxg^{-1}$ را خودریختی داخلی نظیر g می‌نامیم. فرض کنید a و b دو عضو گروه G باشند که خودریختی‌های داخلی نظیر آن‌ها با یکدیگر برابرند. در این صورت کدام یک درست است؟

(۱) $a = b$

(۲) $ab \in Z(G)$

(۳) $b = a^{-1}$

(۴) $ab = ba$

۱۱- فرض کنید K یک میدان شامل Q بوده و $[K:Q] = n$. اگر $\phi: K \rightarrow M_n(Q)$ یک تکریختی (منومورفیسم) حلقه‌ای باشد، n چه اعدادی می‌تواند باشد؟

(۱) ۱

(۲) ۱, ۲

(۳) ۱, ۲, ۴

(۴) نامتناهی حالت برای n وجود دارد.

۱۲- فرض کنیم A یک ماتریس 4×5 و B یک ماتریس 5×4 با درایه‌های از میدان F باشند. به علاوه فرض کنیم رتبه A برابر ۴ و رتبه B برابر ۳ باشند. کدام گزینه صحیح است؟

(۱) نه AB وارون‌پذیر است و نه BA .

(۲) هم AB وارون‌پذیر است و هم BA .

(۳) BA وارون‌پذیر است ولی AB لزوماً وارون‌پذیر نیست.

(۴) AB وارون‌پذیر است ولی BA لزوماً وارون‌پذیر نیست.

۱۳- ماتریس $A \in M_3(\mathbb{R})$ در رابطه $A^2 + 4A + 3I = 0$ صدق می‌کند. $\text{Tr}(A)$ کدام یک از گزینه‌های زیر نمی‌تواند باشد؟

(۱) -۷

(۲) -۵

(۳) -۳

(۴) -۱

۱۴- ماتریس $A \in M_{\Delta}(\mathbb{R})$ در رابطه $A^2 - 4A - I = 0$ صدق می‌کند. اگر $a_1, a_2, \dots, a_{\Delta}$ مقدار ویژه‌های A باشند،

مقدار $(a_1 - \frac{1}{a_1}) + (a_2 - \frac{1}{a_2}) + \dots + (a_{\Delta} - \frac{1}{a_{\Delta}})$ کدام است؟

۴ (۱)

-۲۰ (۲)

۲۰ (۳)

-۴ (۴)

۱۵- ماتریس A یک ماتریس 1395×1395 است که اعضای روی قطر اصلی آن صفر و بقیه اعضا برابر با یک هستند.

این ماتریس روی میدان چند عضوی وارون‌پذیر است؟

۴ (۱)

۹ (۲)

۱۷ (۳)

۴۱ (۴)

۱۶- فرض کنید $A \in M_{\Delta \times 4}(\mathbb{R})$ و $\text{rank}(A) = 3$ و $B \in M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$ و $\text{rank}(B) = 2$. در این صورت:

$\dim(\{X \in M_{4 \times 2}(\mathbb{R}) \mid AXB = 0\})$ برابر است با:

۲ (۱)

۴ (۲)

۶ (۳)

۸ (۴)

مبانی آنالیز عددی:

۱۷- فرض کنید $a > 0$ و $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$ ، برای $n = 0, 1, 2, \dots$ کدام گزینه صحیح است؟

(۱) دنباله $\{x_n\}$ با هر نقطه اولیه $x_0 \in \mathbb{R}$ همگرا به \sqrt{a} است و مرتبه همگرایی آن دقیقاً ۲ است.

(۲) دنباله $\{x_n\}$ با هر نقطه اولیه $x_0 \in \mathbb{R}$ همگرا به \sqrt{a} است و مرتبه همگرایی آن دقیقاً ۱ است.

(۳) دنباله $\{x_n\}$ به‌ازای هر $x_0 < 0$ همگرا به $-\sqrt{a}$ است و مرتبه همگرایی آن دقیقاً ۲ است.

(۴) دنباله $\{x_n\}$ به‌ازای $-\sqrt{a} \leq x_0 \leq \sqrt{a}$ همگرا به \sqrt{a} است و مرتبه همگرایی آن دقیقاً ۲ است.

۱۸- فرض کنید $g(x) = x + \lambda f(x)$ ، f' بر $[a, b]$ پیوسته و مثبت است و $f(a)f(b) < 0$. λ کدام شرایط را داشته باشد تا دنباله $x_{n+1} = g(x_n)$ با x_0 مناسب به یک صفر تابع f همگرا باشد؟

(فرض کنید $M = \max_{a \leq x \leq b} f'(x)$ ، $m = \min_{a \leq x \leq b} f'(x)$)

$$(1) \quad -\frac{2}{M} < \lambda < 0$$

$$(2) \quad \max \left\{ -\frac{2}{m}, -\frac{2}{M} \right\} < \lambda < 0$$

$$(3) \quad -\frac{2}{m} < \lambda < 0$$

$$(4) \quad \min \left\{ -\frac{2}{m}, -\frac{2}{M} \right\} < \lambda < 0$$

۱۹- فرض کنید $x_i, i = 0, 1, \dots, n$ اعداد دو به دو متمایز و $P(x)$ درونیاب چند جمله‌ای از درجه حداکثر n برای

$(x_i, f(x_i)), i = 0, 1, \dots, n$ است. اگر $\sum_{i=0}^{n-1} x_i = 1$ ، ضریب x^{n-1} در $P(x)$ کدام است؟

$$(1) \quad f[x_0, \dots, x_{n-1}]$$

$$(2) \quad f[x_0, \dots, x_{n-1}] - f[x_0, \dots, x_n]$$

$$(3) \quad f[x_0, \dots, x_{n-1}] + f[x_0, \dots, x_n]$$

$$(4) \quad f[x_0, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]$$

۲۰- درجه دقت چند جمله‌ای فرمول انتگرال‌گیری زیر که به فرمول دوزنقه‌ای میانگینی مشهور است چند است؟

(منظور از درجه دقت، دقیق بودن فرمول برای چند جمله‌ای‌ها با بزرگ‌ترین درجه ممکن است.)

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\varepsilon} \int_a^{a+\varepsilon} f(x) dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{b-\varepsilon}^b f(x) dx \right] + E(f), \quad 0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$$

(1)

(2)

(3)

(4)

۲۱- فرض کنید \bar{x} جواب دقیق دستگاه $Ax = b$ است، که در آن A وارون‌پذیر است. \bar{x} را جواب محاسبه شده (تقریبی) برای دستگاه در نظر بگیرید. قرار دهید $r = b - A\bar{x}$ و $e = \bar{x} - \bar{x}$ در این صورت داریم:

$$\frac{\|e\|}{\|\bar{x}\|} \leq \dots$$

$$\|A\| \|r\| \quad (۱)$$

$$\frac{\|r\|}{\|A\|} \quad (۲)$$

$$\frac{\|A^{-1}\| \|r\|}{\|A\| \|b\|} \quad (۳)$$

$$\|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|r\|}{\|b\|} \quad (۴)$$

آنالیز عددی پیشرفته:

۲۲- همه گزینه‌های زیر صحیح‌اند، به‌غیر از:

(۱) $\text{cond}_p(I) = 1$ که I ماتریس همانی است، که $\text{cond}_p(\cdot)$ عدد حالت در نرم p است.

(۲) $\text{cond}_p(A) \geq 1$ به ازای هر $p \geq 1$ ، که $\text{cond}_p(\cdot)$ عدد حالت در نرم p است.

(۳) اگر A مربعی و متعامد باشد، آنگاه $\text{cond}_\infty(A) = 1$ ، $\text{cond}_\infty(\cdot)$ عدد حالت در نرم ∞ است.

(۴) اگر A مربعی و $\text{cond}_p(A) = 1$ ، آنگاه A ضربی از یک ماتریس متعامد است.

۲۳- در محاسبه تخمینی برای انتگرال معین $\int_L^U (x-L)^2 (x-U)^2 dx$ با روش دوزنقه‌ای مرکب روی $n > 1$ زیر بازه

مساوی با طول هر زیر بازه برابر با $h = \frac{U-L}{n}$ ، خطای برشی از کدام مرتبه است؟

$$h^5 \quad (۱)$$

$$h^4 \quad (۲)$$

$$h^3 \quad (۳)$$

$$h^2 \quad (۴)$$

۲۴- برای قاعده نقطه میانی $\int_0^h f(x)dx = hf\left(\frac{h}{2}\right)$ هسته پتانو در بازه $\left[0, \frac{h}{2}\right]$ کدام است؟

(۱) $\frac{t^2}{2}$

(۲) $-\frac{t^2}{2}$

(۳) $\frac{(h-t)^2}{2}$

(۴) $\frac{1}{2}(h+t)^2$

۲۵- دنباله روش نیوتن برای یافتن ریشه $\alpha = 0$ مربوط به تابع $f(x) = \sin x$ را در نظر بگیرید. اگر دنباله به ازای هر x_0 در بازه $(-x^*, x^*)$ همگرا باشد، x^* در کدام رابطه صدق می‌کند؟

(۱) $-\frac{\pi}{2} < x^* < \frac{\pi}{2}$

(۲) $x^* = \tan x^*$

(۳) $x^* = 2 \tan x^*$

(۴) $2x^* = \tan x^*$

۲۶- تابع جدولی زیر داده شده است.

| | | | |
|-------|---|---|---------------|
| x_i | 0 | 1 | -1 |
| f_i | 1 | 2 | $\frac{3}{5}$ |

این تابع را با کسر $\frac{P(x)}{q(x)}$ و به کمک تفاضلات وارون درونیابی کرده‌ایم. درجه $P(x)$ و درجه $q(x)$ به ترتیب

کدامند؟

(۱) ۲ و ۰

(۲) ۱ و ۰

(۳) ۱ و ۱

(۴) ۰ و ۱

۲۷- فرض کنید f تابعی تعریف شده در بازه $[a, b]$ باشد و S_h اسپلاین درونیاب خطی f روی نقاط هم فاصله با فاصله h باشد. همه گزینه‌های زیر صحیح‌اند، به جز:

(۱) S_h با مرتبه h^2 به f همگرایی یکنواخت است اگر $f \in C^2[a, b]$.

(۲) S_h با مرتبه h^2 به f همگرایی یکنواخت است اگر $f \in C^1[a, b]$.

(۳) S_h با مرتبه h به f همگرایی یکنواخت است اگر $f \in C^1[a, b]$.

(۴) S_h به f همگرایی یکنواخت است اگر $f \in C[a, b]$.

۲۸- فرض کنید q یک اسپلاین مکعبی با تنها یک نقطه گره‌ای $x = a$ است و برای هر $x \leq a$ داریم $q(x) = 0$. کدام گزینه صحیح است؟

(۱) q یک چند جمله‌ای از درجه حداکثر ۳ است.

(۲) ثابت c وجود دارد که $q(x) = c(x-a)_+^2$.

(۳) ثابت c وجود دارد که $q(x) = c(x-a)_+^3$.

(۴) ثابت‌های c و d وجود دارند که $q(x) = c(x-a)_+^2 + d(x-a)_+^3$.

آنالیز حقیقی:

۲۹- فرض کنید m اندازه لیگ روی \mathbb{R} ، m^* اندازه خارجی متناظر با m و A و B دو مجموعه در \mathbb{R} باشند به طوری که $B \subseteq A$ و $m(B) = m^*(A)$. در این صورت کدام گزینه درست است؟

(۱) $m^*(A \setminus B) = 0$.

(۲) مجموعه A لیگ اندازه‌پذیر است.

(۳) مجموعه $A \setminus B$ لیگ اندازه‌پذیر است.

(۴) اگر $m^*(A) < \infty$ آنگاه مجموعه A لیگ اندازه‌پذیر است.

۳۰- برای دنباله $\{x_n\}$ تعریف می‌کنیم $\sup_n |x_n|$ و $\|x_n\|_\infty$ ، کدام فضا نسبت به $\|\cdot\|_\infty$ باناخ است؟

(۱) $\{\{x_n\}: \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\}$

(۲) $\{\{x_n\}: \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0\}$

(۳) $\{\{x_n\}: \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$

(۴) $\{\{x_n\}: \text{فقط تعداد متناهی } x_n \text{ ناصفر است}\}$

۳۱- کدام گزینه صحیح است؟

(۱) اگر $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته و کراندار باشد، آنگاه $\inf \{ \alpha : m(\{x : f(x) > \alpha\}) = 0 \} = \sup \{ f(x) : x \in \mathbb{R} \}$

(۲) اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $f_n \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^{\infty}(\mathbb{R})$ و $f_n \xrightarrow{L^1(\mathbb{R})} 0$ و $f_n \xrightarrow{L^{\infty}(\mathbb{R})} 0$ آنگاه $f_n \xrightarrow{L^1(\mathbb{R})} 0$

(۳) اگر $1 < p < q < \infty$ آنگاه $L^q(\mathbb{R}) \subseteq L^p(\mathbb{R})$

(۴) $L^{\infty}(\mathbb{R}) \subseteq L^1(\mathbb{R})$

۳۲- فرض کنید توابع حقیقی f_n و f بر \mathbb{R} لبگ انتگرال پذیر باشند، به طوری که دنباله $\{f_n\}$ به تابع f تقریباً همه جا

به طور نقطه‌ای همگراست. در این صورت کدام گزینه با $\int_{\mathbb{R}} |f_n - f| dm \rightarrow 0$ معادل است؟

(۱) $\int_{\mathbb{R}} |f_n| dm \rightarrow \int_{\mathbb{R}} |f| dm$

(۲) $\int_{\mathbb{R}} f_n dm \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f dm$

(۳) $f_n \rightarrow f$ در اندازه

(۴) $f_n \rightarrow f$ به طور یکنواخت بر \mathbb{R}

۳۳- اگر $E \subseteq [0, \frac{\pi}{4}]$ زیرمجموعه اندازه ناپذیر لبگ باشد و $f(x) = \begin{cases} X_E(x) + \sin x & x \in Q \cap [0, \frac{\pi}{4}] \\ |x| + \sin x & x \in Q^c \cap [0, \frac{\pi}{4}] \end{cases}$ کدام گزینه درست است؟

(۱) f بر $[0, \frac{\pi}{4}]$ لبگ اندازه پذیر نیست.

(۲) f بر $[0, \frac{\pi}{4}]$ لبگ انتگرال پذیر نیست.

(۳) تابع f بر $[0, \frac{\pi}{4}]$ لبگ انتگرال پذیر است و مقدار انتگرال f بر $[0, \frac{\pi}{4}]$ برابر $\frac{\pi}{4}$ است.

(۴) تابع f بر $[0, \frac{\pi}{4}]$ لبگ انتگرال پذیر است و مقدار انتگرال f بر $[0, \frac{\pi}{4}]$ برابر $\frac{\pi}{4} - 1$ است.

۳۴- فرض کنید $M = \{f \in L^{\infty}(\mathbb{R}) : \forall x \in \mathbb{R} \setminus [0, 1], f(x) = 0\}$ و $P_M: L^{\infty}(\mathbb{R}) \rightarrow L^{\infty}(\mathbb{R})$ تصویر متعامد روی M

باشد. برای هر $f \in L^{\infty}(\mathbb{R})$ داریم:

(۱) $P_M(f) = f$

(۲) $P_M(f) = f \cdot \chi_{[0, 1]}$

(۳) $P_M(f) = 1 - f$

(۴) $P_M(f) = (1 - f) \cdot \chi_{[0, 1]}$

۳۵- عملگر خطی $T: (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$T(x, y) = (x - y, 0) \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

برای هر $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ، $\|(x, y)\|_p = \sqrt{x^2 + y^2}$ در این صورت کدام گزینه درست است؟

(۱) $\|T\| = 2\sqrt{2}$

(۲) $\|T\| = 1$

(۳) $\|T\| = \sqrt{2}$

(۴) عملگر T بی‌کران است.

تحقیق در عملیات پیشرفته:

۳۶- فرض کنید جدول زیر متناظر با یکی از تکرارهای الگوریتم سیمپلکس برای حل یک مسأله برنامه‌ریزی خطی است.

| | Z | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | |
|-------|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|---|
| Z | 1 | -1 | -1 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| x_5 | 0 | 1 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 9 |
| x_4 | 0 | 1 | 1 | -1 | 1 | 0 | 0 | 2 |
| x_6 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 4 |

با توجه به جدول، در ترکیب خطی $a_3 = \alpha a_4 + \beta a_5 + \gamma a_6$ ، مقدار β کدام است؟ (a_j ستون مربوط به متغیر x_j در مسأله اولیه است.)

(۱) 1

(۲) 2

(۳) -1

(۴) -2

۳۷- کدام گزینه در ارتباط با مسأله اولیه (P) و مسأله دوگان (D) همواره صادق است؟

(۱) اگر (P) جواب بهینه تبهگن (degenerate) داشته باشد، آنگاه (D) جواب بهینه چندگانه دارد.

(۲) اگر (P) جواب بهینه یکتا داشته باشد، آنگاه (D) جواب بهینه یکتا دارد.

(۳) اگر (P) جواب بهینه چندگانه داشته باشد، آنگاه (D) جواب بهینه تبهگن دارد.

(۴) اگر (P) جواب بهینه چندگانه داشته باشد، آنگاه (D) جواب بهینه چندگانه دارد.

۳۸- فرض کنید مسأله برنامه‌ریزی خطی (p) به صورت

$$\begin{aligned} \min Z &= c^T x \\ \text{s.t. } Ax &= b \quad (p) \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

یک جواب پایه‌ای بهینه با پایه B دارد. بردار c را با بردار جدید $\bar{c} \neq c$ جایگزین کنید و مسأله جدید را (p) بنامید. قرار دهید:

$$\bar{y}_{\cdot j} = \bar{c}_B^T B^{-1} a_j - \bar{c}_j, \quad j = 1, \dots, n$$

که در آن، a_j ستون j ام در ماتریس $A_{m \times n}$ است. گزینه صحیح کدام است؟

- (۱) B یک پایه شدنی برای (p) است و $\bar{y}_{\cdot j} \neq 0$ به ازای برخی متغیرهای پایه‌ای x_j .
 (۲) B یک پایه شدنی برای (p) است و $\bar{y}_{\cdot j} = 0$ به ازای هر متغیر پایه‌ای x_j .
 (۳) تنها اگر $\bar{c}_j \neq c_j$ به ازای برخی x_j پایه‌ای، آنگاه $\bar{y}_{\cdot j} \neq 0$ امکان دارد.
 (۴) $\bar{y}_{\cdot j} = 0$ به ازای هر متغیر پایه‌ای x_j ولی B ممکن است یک پایه شدنی نباشد.

۳۹- برای حل مسأله

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 \\ \text{s.t.} \quad & \\ & \varepsilon x_1 - 2x_2 \geq \varepsilon \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

که در آن $\varepsilon > 0$ ، با استفاده از روش M-بزرگ کدام گزینه صحیح است؟

$$M > \frac{2}{\varepsilon} \quad (1)$$

$$M > 2\varepsilon \quad (2)$$

$$M > \frac{\varepsilon}{2} \quad (3)$$

$$M < 2\varepsilon \quad (4)$$

۴۰- بخشی از یک جدول سیمپلکس به صورت زیر داده شده است. با استفاده از قاعده ممانعت دوری بلند (Bland) متغیر وارد شونده کدام است؟ (مسأله کمینه‌سازی است.)

| | Z | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | x_7 | RHS |
|-------|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| Z | 1 | 0 | 0 | 2 | 0 | 4 | 4 | 4 | |
| x_2 | | 0 | 1 | 0 | | | | | |
| x_4 | | 0 | 0 | | 1 | | | | |
| x_1 | | 1 | 0 | 0 | | | | | |

$$x_7 \quad (1)$$

$$x_6 \quad (2)$$

$$x_3 \quad (3)$$

$$x_5 \quad (4)$$

۴۱- یکی از تکرارهای ناتباهیده الگوریتم سیمپلکس با متغیرهای کران دار برای حل مسأله

$$\min c^T x$$

s.t.

$$Ax = b$$

$$l \leq x \leq u$$

با $l_1 = 2$ ، $l_2 = 3$ ، $u_1 = 4$ و $u_2 = 5$ را در نظر بگیرید. فرض کنید x_1 و x_2 در این تکرار به ترتیب پایه‌ای و غیرپایه‌ای هستند. کدام یک از مقادیر داده شده را می‌تواند بگیرد؟

۰ (۱)

۶ (۲)

۱۰ (۳)

۲۰ (۴)

۴۲- مسأله (p) را به صورت

$$\max z = \sum_{i=1}^m y_i$$

s.t.

$$Ax + y = b$$

$$x \geq 0$$

$$y \leq 0$$

در نظر بگیرید. دستگاه $Ax = b$ یک جواب $x \geq 0$ دارد

(۱) اگر (p) بی‌کران نباشد.

(۲) اگر دوگان (p) بی‌کران نباشد.

(۳) اگر (p) و دوگان (p) هر دو شدنی باشند.

(۴) اگر و تنها اگر دوگان (p) جواب بهینه با مقدار بهینه برابر با صفر داشته باشد.

۴۳- مسأله برنامه‌ریزی خطی (p) را به صورت

$$\max z = c^T x$$

s.t.

$$Ax \leq b$$

(p)

در نظر بگیرید. فرض کنید $b \geq 0$ و $c^T x \leq 0 \Rightarrow Ax \leq b$.

گزینه صحیح کدام است؟

(۱) $u \geq 0$ وجود دارد به طوری که $A^T u = c$.

(۲) بردار $u = 0$ جواب بهینه برای دوگان (p) است.

(۳) $u \leq 0$ وجود دارد به طوری که $A^T u = c$.

(۴) $A^T u = c$ جواب ندارد.

۴۴- فرض کنید مجموعه $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b, x \geq 0\}$ کران‌دار است. دستگاه

$$I: A^T y < c, y \geq 0$$

را در نظر بگیرید ($c \in \mathbb{R}^n$ برداری ثابت و y بردار متغیرهاست). گزینه صحیح کدام است؟

- (۱) دستگاه I جواب دارد اگر و تنها اگر $c < 0$.
- (۲) دستگاه I جواب دارد اگر و تنها اگر $c > 0$.
- (۳) دستگاه I جواب دارد اگر و تنها اگر $c \neq 0$.
- (۴) دستگاه I به ازای هر $c \in \mathbb{R}^n$ جواب دارد.

۴۵- مدل برنامه‌ریزی خطی زیر را برای $\lambda > 0$ در نظر بگیرید:

$$z^*(\lambda) = \text{Max } z(\lambda) = \lambda c^T x$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{aligned} Ax &\leq \frac{1}{\lambda} b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

در واقع، $z^*(\lambda)$ مقدار بهینه مسأله بالا به ازای $\lambda > 0$ داده شده است. فرض کنید $z^*(1)$ موجود و متناهی است. کدام گزینه درست است؟

- (۱) $z^*(\lambda)$ تابعی ثابت نسبت به λ است.
- (۲) $z^*(\lambda)$ تابعی افزایشی نسبت به λ است.
- (۳) ممکن است $z^*(\lambda)$ برای برخی از مقادیر λ موجود نباشد.
- (۴) $z^*(\lambda)$ تابعی کاهشی نسبت به λ است.



