

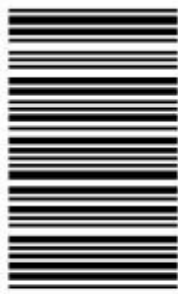
269

F

نام:

نام خانوادگی:

محل امضا:



269F

صبح جمعه
۱۳۹۵/۱۲/۶
دفترچه شماره (۱)



«اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.»
امام خمینی (ره)

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
سازمان سنجش آموزش کشور

آزمون ورودی
دوره دکتری (نیمه‌متمرکز) داخل - سال ۱۳۹۶

رشته امتحانی ریاضی محض (کد ۲۲۳۳)

تعداد سؤال: ۴۵
مدت پاسخگویی: ۱۵۰ دقیقه

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	مجموعه دروس تخصصی (مبانی آنالیز ریاضی - آنالیز ریاضی - مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی - مبانی جبر - جبر پیشرفته - آنالیز حقیقی)	۴۵	۱	۴۵

این آزمون نمره منفی دارد.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

اسفندماه - سال ۱۳۹۵

حق چاپ، تکثیر و انتشار سؤالات به هر روش (الکترونیکی و ...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

مبانی آنالیز ریاضی - آنالیز ریاضی:

۱- اگر $a, b > 1$ ، مقدار $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{\sqrt[n]{a}-1}{b})^n$ کدام است؟

(۱) $a^{\frac{1}{b}}$

(۲) $\frac{a}{b}$

(۳) e^{a-b}

(۴) ۱

۲- فرض کنید $f: S \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی اکیداً یکنوا باشد. کدام گزینه درست است؟

(۱) باز یا بسته یا همبند بودن $f(S)$ ، پیوستگی f را نتیجه می‌دهد.

(۲) باز یا بسته بودن $f(S)$ پیوستگی f را نتیجه می‌دهد ولی همبند بودن $f(S)$ پیوستگی f را نتیجه نمی‌دهد.

(۳) همبند یا بسته بودن $f(S)$ پیوستگی f را نتیجه می‌دهد ولی باز بودن $f(S)$ پیوستگی f را نتیجه نمی‌دهد.

(۴) باز یا همبند بودن $f(S)$ پیوستگی f را نتیجه می‌دهد ولی بسته بودن $f(S)$ پیوستگی f را نتیجه نمی‌دهد.

۳- اگر تابع $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته یکنواخت باشد، کدام گزینه درست است؟

(۱) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ هر دو موجود هستند.

(۲) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ لزوماً موجود نیستند.

(۳) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ موجود است ولی $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ لزوماً موجود نیست.

(۴) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ موجود است ولی $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ لزوماً موجود نیست.

۴- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \sin x & x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{2}{\pi} & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$ بر $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ ، کدام گزینه درست است؟

(۱) تابع f دارای تابع اولیه است.

(۲) تابع f در هیچ نقطه‌ای از $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ پیوسته نیست.

(۳) انتگرال بالایی تابع f برابر یک است.

(۴) تابع f در خاصیت مقدار میانی صدق نمی‌کند.

۵- فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک است. متریک ρ را روی X به صورت $\rho(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$ تعریف

می‌کنیم. کدام گزینه نادرست است؟

(۱) مترهای ρ و d معادل هستند.

(۲) $E \subseteq X$ نسبت به متر ρ همبند است اگر و تنها اگر نسبت به متر d همبند باشد.

(۳) $E \subseteq X$ نسبت به متر ρ فشرده است اگر و تنها اگر نسبت به متر d فشرده باشد.

(۴) به ازای هر فضای متریک Y ، تابع $f: X \rightarrow Y$ نسبت به متر ρ پیوسته است اگر و تنها اگر نسبت به متر d پیوسته باشد.

۶- اگر فضای توابع پیوسته حقیقی مقدار روی $[a, b]$ ، $\{x_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی در $[a, b]$ و ψ_n بر $C[a, b]$ به صورت $\psi_n(f) = f(x_n)$ تعریف شود، آنگاه شرط لازم و کافی برای اینکه $\{\psi_n\}$ به طور یکنواخت همگرا باشد کدام است؟

(۱) $\{x_n\}$ همگرا باشد.

(۲) $\{x_n\}$ کراندار باشد.

(۳) $\{x_n\}$ از مرحله‌ای به بعد ثابت باشد.

(۴) $\{x_n\}$ زیر دنباله‌ای همگرا داشته باشد.

۷- فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی و همگرا به صفر باشد. $X = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \mid \text{مجهز به متر}$
 $d((a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty}) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n - b_n|$ باشد و $E = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in X \mid \forall n \in \mathbb{N}, x_n \geq 0\}$ کدام گزینه درست است؟

(۱) E همبند نیست.

(۲) $E^\circ = \emptyset$

(۳) $E' \neq E$

(۴) E بسته نیست.

۸- کدام گزینه شرط لازم و کافی برای فشردگی فضای متریک X نیست؟

(۱) هر تابع پیوسته حقیقی مقدار بر X اکسترم‌های مطلق خود را اختیار می‌کند.

(۲) هر تابع پیوسته از X به یک فضای متریک Y پیوسته یکنواخت است.

(۳) هر تابع پیوسته از X به یک فضای متریک Y مجموعه‌های بسته را به مجموعه بسته می‌نگارد.

(۴) هر تابع پیوسته از X به یک فضای متریک Y کران‌دار است.

۹- برای هر $n \in \mathbb{N}$: تابع $f_n(x) = n(\sin(x + \frac{1}{n}) - \sin x)$ را بر \mathbb{R} در نظر می‌گیریم. در این صورت دنباله توابع

$(f_n)_{n=1}^{\infty}$ بر \mathbb{R} ...

(۱) به طور نقطه‌وار به تابع ثابت صفر همگرا است ولی نه به طور یکنواخت.

(۲) به طور نقطه‌وار به تابع $\cos x$ همگرا است ولی نه به طور یکنواخت.

(۳) به طور یکنواخت به تابع ثابت صفر همگرا است.

(۴) به طور یکنواخت به تابع $\cos x$ همگرا است.

مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی - مبانی جبر:

۱۰- فرض کنید $G = S_6$ و $H = \{e, (12), (16), (36), (136), (163)\}$. قرار می‌دهیم $T = \langle H \rangle$. تعداد عناصر مرتبه ۲ در T برابر است با:

(۱) ۳

(۲) ۴

(۳) ۵

(۴) ۶

۱۱- فرض کنید G, H, K و N زیر گروه‌هایی از یک گروه باشند. کدام مورد درست است؟
 (۱) اگر $G' \times G' \cong H' \times H'$ که G' و H' زیر گروه‌های مشتق هستند، آنگاه $G = H$.

(۲) اگر گروه‌های فوق همگی آبلی باشند و $N < H$ و $K < G$ و $K \cong N$ و $G \cong H$ ، آنگاه $\frac{G}{K} \cong \frac{H}{N}$.

(۳) اگر $G \times H = G \times K$ ، آنگاه $H = K$.

(۴) اگر گروه‌های فوق آبلی بوده و $G \cap N = G \cap K$ ، آنگاه $\frac{G+N}{N} \cong \frac{G+K}{K}$.

۱۲- فرض کنید G یک گروه است و $g \in G$. در این صورت نگاشت $I_g : G \rightarrow G$ که $I_g(x) = gxg^{-1}$ را خودریختی داخلی نظیر g می‌نامیم. فرض کنید a و b دو عضو گروه G باشند که خودریختی‌های داخلی نظیر آن‌ها با یکدیگر برابرند. در این صورت کدام یک درست است؟

(۱) $a = b$

(۲) $ab = ba$

(۳) $b = a^{-1}$

(۴) $ab \in Z(G)$

۱۳- در گروه تقارن‌های یک 10 ضلعی منتظم که با D_{10} نمایش داده می‌شود، اگر R یک دوران و T یک انعکاس باشد، که $RT = TR$ ، در این صورت کدام گزینه درست است؟
 (۱) T در مرکز گروه قرار دارد.

(۲) R فقط می‌تواند دوران 360° باشد.

(۳) R در مرکز گروه قرار دارد.

(۴) T با هیچ انعکاسی غیر از خودش جابه‌جا نمی‌شود.

۱۴- فرض کنید K یک میدان شامل Q بوده و $[K : Q] = n$. اگر $\phi : K \rightarrow M_n(Q)$ یک تکریختی (منومورفیزم) حلقه‌ای باشد، n چه اعدادی می‌تواند باشد؟

(۱) ۱

(۲) ۱، ۲

(۳) ۱، ۲، ۴

(۴) نامتناهی حالت برای n وجود دارد.

- ۱۵- کدام مورد صحیح است؟
- (۱) هر ایده‌آل ماکسیمال در حلقه R ، اول است.
- (۲) هر ایده‌آل سره در حلقه R در یک ایده‌آل ماکسیمال قرار دارد.
- (۳) هر ایده‌آل اول ناصفر ماکسیمال است.
- (۴) اگر حلقه R یک‌دار و متناهی باشد، آنگاه تعداد ایده‌آل‌های ماکسیمال و تعداد ایده‌آل‌های اول R برابر است.
- ۱۶- فرض کنیم A یک ماتریس 4×5 و B یک ماتریس 5×4 با درایه‌های از میدان F باشند. به علاوه فرض کنیم رتبه A برابر ۴ و رتبه B برابر ۳ باشند. کدام گزینه صحیح است؟
- (۱) نه AB وارون‌پذیر است و نه BA .
- (۲) هم AB وارون‌پذیر است و هم BA .
- (۳) BA وارون‌پذیر است ولی AB لزوماً وارون‌پذیر نیست.
- (۴) AB وارون‌پذیر است ولی BA لزوماً وارون‌پذیر نیست.
- ۱۷- ماتریس $A \in M_7(\mathbb{R})$ در رابطه $A^2 + 4A + 2I = 0$ صدق می‌کند. $\text{Tr}(A)$ کدام‌یک از گزینه‌های زیر نمی‌تواند باشد؟
- (۱) -۱
- (۲) -۳
- (۳) -۵
- (۴) -۷
- ۱۸- ماتریس $A \in M_5(\mathbb{R})$ در رابطه $A^2 - 4A - I = 0$ صدق می‌کند. اگر a_1, a_2, \dots, a_5 مقدار ویژه‌های A باشند، مقدار $(a_1 - \frac{1}{a_1}) + (a_2 - \frac{1}{a_2}) + \dots + (a_5 - \frac{1}{a_5})$ کدام است؟
- (۱) ۴
- (۲) -۲۰
- (۳) ۲۰
- (۴) -۴

۱۹- ماتریس A یک ماتریس 1395×1395 است که اعضای روی قطر اصلی آن صفر و بقیه اعضا برابر با یک هستند.

این ماتریس روی میدان چند عضوی وارون پذیر است؟

(۱) ۴

(۲) ۹

(۳) ۱۷

(۴) ۴۱

۲۰- فرض کنید $A, B \in M_{10}(\mathbb{R})$ و هر دو دارای مقدار ویژه ۲ با تکرار ۷ باشند. اگر A و B قطری شدنی باشند، در

این صورت رتبه ماتریس $A - B$ حداکثر چه می‌تواند باشد؟

(۱) ۹

(۲) ۸

(۳) ۷

(۴) ۶

۲۱- فرض کنید $A \in M_{5 \times 4}(\mathbb{R})$ و $\text{rank}(A) = 3$ و $B \in M_{3 \times 4}(\mathbb{R})$ و $\text{rank}(B) = 2$. در این صورت:

$\dim(\{X \in M_{4 \times 3}(\mathbb{R}) \mid AXB = 0\})$ برابر است با:

(۱) ۲

(۲) ۴

(۳) ۶

(۴) ۸

جبر پیشرفته:

۲۲- اشتراک همه ایده‌آل‌های اول حلقه $\frac{\mathbb{Z}}{120\mathbb{Z}}$ برابر است با:

(۱) $\frac{10\mathbb{Z}}{120\mathbb{Z}}$

(۲) $\frac{15\mathbb{Z}}{120\mathbb{Z}}$

(۳) $\frac{30\mathbb{Z}}{120\mathbb{Z}}$

(۴) $\frac{60\mathbb{Z}}{120\mathbb{Z}}$

۲۳- \mathbb{Z} - مدول $(\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Q})$ با کدام یک از \mathbb{Z} - مدول‌های زیر یکرخت است؟

(۱) \mathbb{Q}

(۲) $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Q}$

(۳) $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Q}$

(۴) $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Q}$

۲۴- \mathbb{R} حلقه جابه‌جایی و یک‌دار و M و N دو \mathbb{R} -مدول یکانی دوری فرض می‌شوند. اگر $\text{Ann}(M) = \text{Ann}(N)$ ، کدام یک از موارد زیر درست است؟

(۱) $\text{Ann}(M \oplus N) \subsetneq \text{Ann}(M)$

(۲) $M = N$

(۳) $\text{Ann}(M) \subsetneq \text{Ann}(M \oplus N)$

(۴) $M \cong N$

۲۵- فرض کنید p یک عدد اول باشد. در این صورت تعداد ایده‌آل‌های ماکسیمال حلقه

$$Q_p = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, (p, n) = 1 \right\}$$

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

۲۶- فرض کنید $\mathbb{R} = \mathbb{R}[x]$ حلقه سری‌های توانی صوری روی میدان اعداد حقیقی \mathbb{R} باشد، در این صورت کدام

یک از موارد زیر صحیح است؟

(۱) \mathbb{R} آر‌تینی است.

(۲) \mathbb{R} تنها یک ایده‌آل ماکسیمال دارد.

(۳) هر ایده‌آل اول \mathbb{R} ماکسیمال است.

(۴) \mathbb{R} دارای عنصر پوچتوان ناصفر است.

۲۷- اگر R حلقه‌ای جابه‌جایی و یک‌دار باشد به گونه‌ای که برای ایده‌آل I ، یک R -زیر مدول از $R[x]$ مانند K موجود

باشد که $R[x] = I[x] \oplus K$ ، آنگاه:

(۱) $I[x]$ پروژکتیو و آزاد است.

(۲) $I[x]$ نه پروژکتیو است و نه آزاد.

(۳) $I[x]$ آزاد است ولی لزوماً پروژکتیو نیست.

(۴) $I[x]$ پروژکتیو است ولی لزوماً آزاد نیست.

۲۸- فرض کنید R حلقه توابع پیوسته از \mathbb{R} به \mathbb{R} با مجموع و حاصلضرب توابع باشد. در این صورت کدام گزینه

صحیح است؟

(۱) R یک حلقه تقسیم است.

(۲) R نوتری نیست.

(۳) حوزه صحیح است.

(۴) هر ایده‌آل اول R باتولید متناهی است.

۲۹- فرض کنید G یک گروه بوده و $f: \mathbb{Z}^n \rightarrow G$ یک بروربختی (ای‌مورفیزم) و $g: \mathbb{Z}^n \rightarrow G$ یک تکریبختی

(نومورفیزم) باشد. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟ (توجه کنید $\mathbb{Z}^n = \underbrace{\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}}_n$ بار)

(۱) $G \cong \mathbb{Z}^n$.

(۲) G می‌تواند گروهی ناآبلی باشد.

(۳) G دارای عنصر غیربدیهی از مرتبه متناهی است.

(۴) $G \cong \mathbb{Z}^r \times H$ که H گروهی متناهی از مرتبه حداقل ۲ است.

۳۰- فرض کنید $R = Q[x, y, z]$ و $M = \frac{R}{I}$ که در آن $I = \langle x+z, y^2z \rangle$. چنانچه $f: M \rightarrow M$ یک هم‌ریختی

R -مدولی پوشا باشد کدام گزینه صحیح است؟

(۱) $\text{Ker} f^2 \neq \text{Ker} f$

(۲) زیر مدول ماکسیمال و ناصفر N موجود است که $\text{Ker} f = N$.

(۳) $\text{Ker} f = 0$.

(۴) زیر مدول مینیمال و ناصفر N موجود است که $\text{Ker} f = N$.

۳۱- فرض کنید R یک حوزه ایده‌آل اصلی باشد که میدان نیست و M یک R -مدول باشد. کدام یک از گزاره‌های زیر

نادریست است؟

(۱) M تصویری است اگر و تنها اگر M آزاد باشد.

(۲) اگر M با تولید متناهی باشد، آنگاه طول M متناهی است.

(۳) تزریقی است اگر و تنها اگر M بخش‌پذیر باشد.

(۴) اگر M هم تصویری و هم تزریقی باشد، آنگاه $M = 0$.

۳۲- فرض کنیم R یک حلقه جابه‌جایی و یک‌دار و I یک ایده‌آل آن باشد به طوری که $\frac{R}{I}$ یک R -مدول تصویری

است. در این صورت:

(۱) I یک ایده‌آل اصلی و اول است.

(۲) I یک ایده‌آل اصلی و پوچتوان است.

(۳) I یک ایده‌آل خودتوان و اول است.

(۴) I یک ایده‌آل اصلی و خودتوان است.

۳۳- فرض کنیم R یک حلقه یک‌دار و جابه‌جایی و M و N دو R -مدول باشند به طوری که $M \otimes_R N$ آزاد ناصفر

است. در این صورت $M \oplus N$ یک R -مدول است.

(۱) آزاد است.

(۲) نوتری است.

(۳) تصویری است.

(۴) بخش‌پذیر است.

آنالیز حقیقی:

۳۴- فرض کنید m اندازه لیگ روی \mathbb{R} ، m^* اندازه خارجی متناظر با m و A و B دو مجموعه در \mathbb{R} باشند به طوری که

B لیگ اندازه پذیر است، $B \subseteq A$ و $m(B) = m^*(A)$. در این صورت کدام گزینه درست است؟

$$m^*(A \setminus B) = 0 \quad (1)$$

(۲) مجموعه A ، لیگ اندازه پذیر است.

(۳) مجموعه $A \setminus B$ ، لیگ اندازه پذیر است.

(۴) اگر $m^*(A) < \infty$ آنگاه مجموعه A لیگ اندازه پذیر است.

۳۵- فرض کنید E یا $E^c = [0, 2] \setminus E$ حداکثر شمارا باشد $A = \{E \subseteq [0, 2]\}$ و تابع μ بر A با ضابطه

$\mu(E) = \begin{cases} 0 & \text{حداکثر شمارا باشد} \\ 2 & \text{حداکثر شمارا نباشد} \end{cases}$ تعریف شده باشد. اگر $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ دنباله‌ای دوبه‌دو مجزا از اعضای A باشد به

طوری که E_i^c حداکثر شمارا باشد، آنگاه کدام گزینه درست است؟

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = 0 \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) = 0 \quad (2)$$

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = 2 \quad (3)$$

$$\sum_{i=2}^{\infty} \mu(E_i) = 2 \quad (4)$$

۳۶- اگر $\{E_n\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های اندازه پذیر در فضای اندازه (X, Σ, μ) باشد در چه صورت تساوی زیر برقرار است؟

$$\liminf \mu^*(E_n) = \mu^*(\liminf E_n)$$

(۱) دنباله $\{\mu^*(E_n)\}_{n=1}^{\infty}$ در $[0, \infty]$ همگرا باشد.

(۲) دنباله‌ای صعودی باشد.

(۳) دنباله‌ای نزولی باشد.

$$\limsup \mu^*(E_n) \geq \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \quad (4)$$

۳۷- کدام گزینه درست است؟

- (۱) اگر $\{f_\gamma\}_{\gamma \in I}$ خانواده‌ای از توابع لبگ اندازه‌پذیر بر \mathbb{R} باشد آنگاه $f = \sup f_\gamma$ اندازه‌پذیر است.
 (۲) اگر دنباله توابع لبگ اندازه‌پذیر $\{f_n\}$ بر \mathbb{R} نقطه‌وار به صفر همگرا باشد آنگاه در اندازه نیز به صفر همگراست.
 (۳) تابع لبگ اندازه‌پذیر $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ موجود است که برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ $f(x+y) = f(x) + f(y)$ اما f پیوسته نیست.
 (۴) تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ لبگ اندازه‌پذیر است اگر و تنها اگر برای زیرمجموعه‌ای چگال در \mathbb{R} مانند D و برای هر $\alpha \in D$ مجموعه $\{x \in \mathbb{R} : f(x) > \alpha\}$ لبگ اندازه‌پذیر باشد.

۳۸- برای دنباله $\{x_n\}$ تعریف می‌کنیم $\sup_n |x_n|$ و $\|\{x_n\}\|_\infty$ کدام فضا نسبت به $\|\cdot\|_\infty$ باناخ است؟

(۱) $\{\{x_n\} : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0\}$

(۲) $\{\{x_n\} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\}$

(۳) $\{\{x_n\} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$

(۴) $\{\{x_n\} : \text{فقط تعداد متناهی } x_n \text{ ناصفر است}\}$

۳۹- کدام گزینه صحیح است؟

(۱) اگر $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته و کراندار باشد، آنگاه $\inf\{\alpha : m(\{x : f(x) > \alpha\}) = 0\} = \sup\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$

(۲) اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$ $f_n \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$ و $f_n \xrightarrow{L^1(\mathbb{R})} 0$ آنگاه $f_n \xrightarrow{L^p(\mathbb{R})} 0$

(۳) اگر $1 < p < q < \infty$ آنگاه $L^q(\mathbb{R}) \subseteq L^p(\mathbb{R})$

(۴) $L^\infty(\mathbb{R}) \subseteq L^1(\mathbb{R})$

۴۰- فرض کنید توابع حقیقی f و f_n بر \mathbb{R} لبگ انتگرال‌پذیر باشند، به طوری که دنباله $\{f_n\}$ به تابع f تقریباً همه جا به طور نقطه‌ای همگراست. در این صورت کدام گزینه با $\int_{\mathbb{R}} |f_n - f| dm \rightarrow 0$ معادل است؟

(۱) $\int_{\mathbb{R}} |f_n| dm \rightarrow \int_{\mathbb{R}} |f| dm$

(۲) $\int_{\mathbb{R}} f_n dm \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f dm$

(۳) $f_n \rightarrow f$ در اندازه

(۴) $f_n \rightarrow f$ به‌طور یکنواخت بر \mathbb{R}

۴۱- مقدار $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_0^n \frac{x \ln(1 + \frac{x}{n})}{1+x} dx$ کدام است؟

(۱) $\ln 2$

(۲) $\ln 2 - \frac{1}{2}$

(۳) $\ln 2 - 1$

(۴) $2 \ln 2 - 1$

۴۲- فرض کنید m اندازه لبگ روی \mathbb{R} و m^* اندازه خارجی متناظر با m باشد و
 $A = \{m^*(E) \mid E \subseteq \mathbb{R} \text{ نامتناهی با درون تهی باشد}\}$

در این صورت کدام گزینه درست است؟

(۱) $A = \{0\}$

(۲) $A = [0, +\infty]$

(۳) $A = \{0, +\infty\}$

(۴) $A = [0, +\infty)$

۴۳- اگر $E \subseteq [0, \frac{\pi}{4}]$ زیرمجموعه اندازه ناپذیر لبگ باشد و
 $f(x) = \begin{cases} X_E(x) + \sin x & x \in Q \cap [0, \frac{\pi}{4}] \\ [x] + \sin x & x \in Q^c \cap [0, \frac{\pi}{4}] \end{cases}$ کدام گزینه درست است؟

(۱) f بر $[0, \frac{\pi}{4}]$ لبگ اندازه‌پذیر نیست.

(۲) f بر $[0, \frac{\pi}{4}]$ لبگ انتگرال‌پذیر نیست.

(۳) تابع f بر $[0, \frac{\pi}{4}]$ لبگ انتگرال‌پذیر است و مقدار انتگرال f بر $[0, \frac{\pi}{4}]$ برابر $\frac{\pi}{4}$ است.

(۴) تابع f بر $[0, \frac{\pi}{4}]$ لبگ انتگرال‌پذیر است و مقدار انتگرال f بر $[0, \frac{\pi}{4}]$ برابر $(\frac{\pi}{4} - 1)$ است.

۴۴- فرض کنید $M = \{f \in L^1(\mathbb{R}) : \forall x \in \mathbb{R} \setminus [0, 1], f(x) = 0\}$ و $P_M : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow L^1(\mathbb{R})$ تصویر متعامد روی M

باشد. برای هر $f \in L^1(\mathbb{R})$ داریم:

(۱) $P_M(f) = f$

(۲) $P_M(f) = f \cdot x_{[0, 1]}$

(۳) $P_M(f) = 1 - f$

(۴) $P_M(f) = (1 - f) \cdot x_{[0, 1]}$

۴۵- عملگر خطی $T : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$T(x, y) = (x - y, 0) \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

(برای هر $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ، $\|(x, y)\|_p = \sqrt{x^2 + y^2}$) در این صورت کدام گزینه درست است؟

(۱) $\|T\| = 2\sqrt{2}$

(۲) $\|T\| = 1$

(۳) $\|T\| = \sqrt{2}$

(۴) عملگر T بی‌کران است.