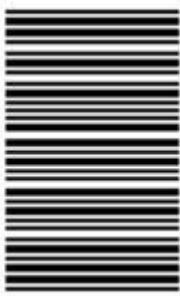


126

B



126B

نام:  
نام خانوادگی:  
محل امضا:

دفتر چه شماره (۱)



جمهوری اسلامی ایران  
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری  
سازمان سنجش آموزش کشور

«اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.»  
امام خمینی (ره)

صبح جمعه  
۱۳۹۴/۱۲/۱۴

آزمون ورودی دوره دکتری (نیمه‌متمرکز) - سال ۱۳۹۵

علوم ریاضی (کد ۲۲۰۶)

مدت پاسخگویی: ۱۲۰ دقیقه
تعداد سؤال: ۴۵

عنوان دروس اختصاصی، تعداد و شماره سؤال‌ها				
ردیف	دروس اختصاصی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	مبانی آنالیز ریاضی، مبانی آنالیز عددی، مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی	۴۵	۱	۴۵

این آزمون نمره منفی دارد.  
استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

حق چاپ، تکثیر و انتشار سؤالات به هر روش (الکترونیکی و ...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می‌باشد و با متغلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

## مبانی آنالیز ریاضی:

۱- فرض کنید  $f: A \times B \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی کراندار باشد. کدام گزینه درست است؟

$$\sup_y \inf_x f(x, y) \leq \inf_y \sup_x f(x, y) \quad (۱)$$

$$\sup_y \inf_x f(x, y) \leq \inf_x \sup_y f(x, y) \quad (۲)$$

$$\sup_y \inf_x f(x, y) \geq \inf_x \sup_y f(x, y) \quad (۳)$$

$$\sup_x \inf_y f(x, y) \leq \inf_x \sup_y f(x, y) \quad (۴)$$

۲- مقدار  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$  کدام است؟

(۱) -۱

(۲) ۰

(۳) ۱

(۴) موجود نیست.

۳- مقدار  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\cos 1} \times \frac{1}{\cos \frac{1}{2}} \times \dots \times \frac{1}{\cos \frac{1}{n}}}$  کدام است؟

(۱) ۰

(۲)  $\frac{1}{2}$

(۳) ۱

(۴)  $\infty$

۴- اگر  $n = 1, 2, \dots$  و  $x_n = \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \dots \times 2n}$  کدام گزینه درست است؟

(۱)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  ولی  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  واگراست.

(۲)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq 0$  لذا  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  واگراست.

(۳)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  و  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  به مقدار کمتر یا مساوی  $e$  همگراست.

(۴)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  و  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  به مقدار بیشتر از  $e$  همگراست.

۵- سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\cos n)(\sin(na))}{n}$  به ازای چه مقادیر  $a$  همگراست؟

(۱) فقط وقتی که  $|a| \leq 1$ .

(۲) فقط وقتی که  $a$  مضربی صحیح از  $\frac{\pi}{2}$  باشد.

(۳) فقط وقتی که  $a$  اصم یا صفر باشد.

(۴) تمام مقادیر  $a \in \mathbb{R}$ .

۶- فرض کنید  $f(x)$  بر بازه  $[0, 1]$  کران‌دار باشد و برای  $0 \leq x \leq \frac{1}{a}$  که  $a, b > 1$  و  $a \neq b$  در رابطه  $f(ax) = bf(x)$

صدق کند. کدام گزینه در مورد  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  درست است؟

(۱) حد موجود و برابر  $\frac{b}{a}$  است.

(۲) حد موجود و برابر  $f(0)$  است.

(۳) حد موجود و برابر  $\frac{a}{b}$  است.

(۴) ممکن است حد موجود نباشد.

۷- در مورد تابع  $f(x) = [x] + (x - [x])^{[x]}$  که  $x \in (0, +\infty)$  کدام گزینه درست است؟

(۱) تابع  $f$  بر  $(0, +\infty)$  اکیداً صعودی است.

(۲)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - [x]) = 0$

(۳) تابع  $f$  بر  $(0, +\infty)$  پیوسته یکنواخت است.

(۴) تابع  $f$  بر  $(0, +\infty)$  پیوسته است ولی پیوسته یکنواخت نیست.

۸- فرض کنید  $I$  یک بازه و  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ . کدام گزینه نتیجه می‌دهد؟  $f$  پیوسته یکنواخت است.

- (۱)  $f$  کران‌دار، پیوسته و یکنوا است.
- (۲)  $f$  پیوسته و  $f \circ f$  پیوسته یکنواخت است.
- (۳)  $f$  یک‌به‌یک و تصویر وارون هر دنباله کوشی، کوشی است.
- (۴) به ازای هر  $n \in \mathbb{N}$  تابع  $g_n(x) = x^n f(x)$  پیوسته یکنواخت است.

۹- فرض کنید  $I$  یک بازه کران‌دار و  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  پیوسته یکنواخت باشد، در این صورت همه گزینه‌های زیر، صحیح‌اند، به‌غیراز:

- (۱)  $f(I)$  کران‌دار است.
  - (۲) اگر  $f$  یک‌به‌یک باشد، تصویر وارون هر دنباله کوشی، کوشی است.
  - (۳) اگر  $f$  اکیداً یکنوا باشد دارای وارون پیوسته یکنواخت است.
  - (۴) چندجمله‌ای  $p$  وجود دارد که  $p \circ f$  پیوسته یکنواخت نیست.
- ۱۰- فرض کنید  $D$  زیرمجموعه باز  $\mathbb{R}$ ،  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  صعودی باشد. کدام گزینه معادل پیوستگی  $f$  نیست؟

- (۱) برای هر  $a \in D$ ،  $\inf \{f(y) - f(x) : x, y \in D, x < a < y\} = 0$ .
- (۲) برای هر زیرمجموعه کران‌دار  $A$  از  $D$ ،  $\inf(f(A)) = f(\inf A)$  و  $\sup f(A) = f(\sup A)$ .
- (۳)  $f$  دارای وارون پیوسته باشد.
- (۴) برای هر  $a \in D$ ، دنباله  $\{x_n\}$  در  $D$  وجود دارد که  $f(a) = \lim f(x_n)$  و  $\{n : x_n < a\}$  و  $\{n : x_n > a\}$  نامتناهی باشد.

۱۱- فرض کنید  $a < 0$  و تابع  $f$  بر بازه  $[a, b]$  پیوسته و بر بازه  $(a, b)$  مشتق‌پذیر باشد. در این صورت عددی مانند  $c$

در بازه  $(a, b)$  یافت می‌شود به طوری که مقدار  $\frac{bf(a) - af(b)}{b - a}$  برابر است با:

- (۱)  $f(c)$
- (۲)  $f'(c)$
- (۳)  $f(c) - cf'(c)$
- (۴)  $cf'(c) - f(c)$

۱۲- فرض کنید  $f$  بر  $(0, \infty)$  مشتق‌پذیر باشد و  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 1$  در این صورت:

- (۱)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$
- (۲)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x+1) - f(x)) = 1$
- (۳)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$
- (۴) به ازای هر  $h \in (0, 1)$ ،  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{h}$

۱۳- فرض کنید  $f$  تابعی اکیداً صعودی و دوبار مشتق‌پذیر بر بازه  $(0, +\infty)$  باشد و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - f''(x)) = L$ . کدام

گزینه درست است؟

(۱)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - f'(x)) = 0$

(۲)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - f'(x)) = L$

(۳)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = 1$

(۴)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + f'(x)) = +\infty$

۱۴- فرض کنید  $f(x)$  بر  $\mathbb{R}$  پیوسته باشد و برای  $n = 0, 1, 2, \dots$  قرار دهیم  $a_n = \int_0^1 f(n+x) dx$  به طوری که

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ . در این صورت مقدار  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(nx) dx$  کدام است؟

(۱) ۰

(۲)  $f(a)$

(۳)  $a$

(۴) ممکن است موجود نباشد.

۱۵- فرض کنید تابع  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  پیوسته باشد. اگر  $k > 1$  موجود باشد که برای هر  $x \in [a, b]$

$|g(x)| \leq k \int_a^x |g(t)| dt$  در این صورت همه گزینه‌های زیر صحیح‌اند، به‌غیر از:

(۱) تابع  $g$  با شرایط بالا وجود دارد که  $\int_a^b |g(x)| dx = k$

(۲) تابع  $g$  بر  $[a, b]$  مشتق‌پذیر است.

(۳)  $\int_a^b g(x) = k(g(b) - g(a))$

(۴) برای هر  $x \in [a, b]$   $|g(x)| = k \int_a^x |g(t)| dt$

مبانی آنالیز عددی:

۱۶- می‌دانیم که  $x$  عددی نزدیک صفر است و  $O(x^p)$  و  $x^2 \cos x - x \sin x + \frac{1}{4} \ln(1+x^4) = O(x^p)$  عدد  $p$  کدام است؟

(۱) ۴

(۲) ۵

(۳) ۶

(۴) ۷



۱۷- در یک دستگاه ممیز شناور نرمال شده در مبنای ۲، هر عدد حقیقی به صورت  $\pm d_1 d_2 \dots d_r \times 2^{\pm d}$  با  $d_i$  ها ارقام در مبنای ۲ و  $d_1 \neq 0$  (وقتی عدد مخالف صفر باشد)، ذخیره می‌شود. فرض کنید در این دستگاه ارقام غیرقابل نمایش بریده می‌شوند. کوچک‌ترین عدد قابل نمایش و روند عدد یک به ترتیب برابرند با ....

(۱)  $2^{-5}$  و  $2^{-4}$

(۲)  $-\frac{1}{2}$  و  $-\frac{1}{4}$

(۳)  $2^{-5}$  و  $-2^{-5}$

(۴)  $-\frac{1}{2}$  و  $-\frac{1}{4}$

۱۸- برای تعیین تقریبی از کوچک‌ترین ریشه مثبت معادله  $x = \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$  به روش تکرار ساده، یعنی  $x_{n+1} = g(x_n)$

گزینه مناسب برای  $g(x)$  کدام است؟

(۱)  $g(x) = \frac{2}{\pi} \text{Arc tan } x$

(۲)  $g(x) = 2 + \frac{2}{\pi} \text{Arc tan } x$

(۳)  $g(x) = \pi + \text{Arc tan } x$

(۴)  $g(x) = -2 + \frac{2}{\pi} \text{Arc tan } x$

۱۹- تقریب تابع  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$  در بازه‌ی  $I = [16, 17]$  با قطعه‌های درون‌یاب خطی مدنظر است. بازه‌ی  $I$  دست‌کم به چند

قطعه مساوی تقسیم شود تا کران بالای خطای درون‌یابی برای تخمین  $f(x)$  در سرتاسر بازه بیش از  $3 \times 2^{-30}$

نباشد؟

(۱) ۳۰

(۲) ۱۰۰۰

(۳) ۱۰۲۴

(۴) ۲۰۴۸

۲۰- فرض کنید  $\frac{3x^2 + x + 1}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} = \frac{a_1}{x-1} + \frac{a_2}{x-2} + \frac{a_3}{x-3}$  سه‌تایی  $(a_1, a_2, a_3)$  کدام است؟

(۱)  $\left(\frac{5}{3}, -15, \frac{31}{3}\right)$

(۲)  $\left(\frac{5}{3}, 15, \frac{31}{3}\right)$

(۳)  $\left(\frac{5}{3}, 15, \frac{31}{3}\right)$

(۴)  $\left(\frac{5}{3}, -15, \frac{31}{3}\right)$

۲۱- اگر  $p(x)$  چندجمله‌ای درونیاب تابع  $f(x) = \sin \frac{\pi x}{4}$  در نقاط  $0, 1, 2$  از بازه  $[0, 2]$  باشد، آنگاه کران بالا برای مقدار  $|f(x) - p(x)|$  در بازه  $[0, 2]$  برابر است با .....

$$\frac{\pi^2}{72} \quad (1)$$

$$\frac{\pi^2}{108} \quad (2)$$

$$\frac{\pi^2 \sqrt{3}}{216} \quad (3)$$

$$\frac{\pi^2 \sqrt{3}}{72} \quad (4)$$

۲۲- مرتبه همگرایی (مجانبی) روش تکراری نیوتن برای تعیین مینیمم تابع  $f(x) = (x-1)^4(x^2+1)-1$  برابر است با .....

(۱) یک

(۲) دو

(۳) سه

(۴) چهار

۲۳- رابطه تکراری زیر را برای پیدا کردن مینیمم کننده تابع  $f(x)$  به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{q(x_n)}$$

فرض کنید دنباله  $\{x_n\}$  به یک نقطه  $x^*$  همگراست و می‌دانیم  $f'(x^*) = 0$ ،  $f''(x^*) > 0$ . چه رابطه‌ای بین  $f$  و  $q$  برقرار باشد تا نرخ همگرایی دست کم برابر با ۲ باشد؟

$$q'(x^*) = f'(x^*) \quad (1)$$

$$q'(x^*) = f''(x^*) \quad (2)$$

$$q''(x^*) = f'(x^*) \quad (3)$$

$$q''(x^*) = f(x^*) \quad (4)$$

۲۴- فرض کنید  $x \in \mathbb{R}^n$  و  $A_{n \times n}$ ، ماتریسی وارون پذیر است. گزینه صحیح برای یک نرم برداری کدام است؟

$$x^t A x \quad (1)$$

$$x^t A^t x \quad (2)$$

$$\sqrt{x^t A x} \quad (3)$$

$$\|Ax\|_2 \quad (4)$$

- ۲۵- مسئله  $\min_{\lambda} \|b\lambda - c\|_2$  را در نظر بگیرید، که در آن  $b, c \in \mathbb{R}^n$ ،  $b \neq 0$  داده شده‌اند و  $\lambda \in \mathbb{R}$  مجهول است. مقدار مینیمم کننده  $\lambda$  .....  
 (۱) برابر است با صفر اگر  $b$  و  $c$  متعامد باشند  
 (۲) یگانه است اگر و تنها اگر  $c = 0$   
 (۳) برابر است با صفر اگر  $b = \alpha c$  به ازای برخی  $\alpha \in \mathbb{R}$   
 (۴) همواره ناصفر است

۲۶- فرض کنید:  $F(h) = \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} = y'(x)$

می‌دانیم که  $F(h) - y'(x) = O(h^r)$ . کدام تقریب برای  $y'(x)$  دارای خطای  $O(h^r)$  است؟

(۱)  $2F(\frac{h}{2}) - F(h)$

(۲)  $\frac{4F(\frac{h}{2}) - F(h)}{3}$

(۳)  $\frac{2F(\frac{h}{2}) + F(h)}{3}$

(۴)  $\frac{4F(\frac{h}{2}) + F(h)}{5}$

- ۲۷- می‌خواهیم تخمینی از  $\int_0^2 f(x) dx$  را با استفاده از جمع دو قاعده سیمسون ساده یکی روی بازه‌ی  $[0, 1]$  و دیگری روی بازه‌ی  $[1, 2]$  به دست آوریم. با استفاده از مقادیر در جدول زیر، مقدار این تخمین سیمسون مرکب برای انتگرال چقدر است؟

x	0	0,25	0,5	0,75	1	1,5	2
f(x)	0	1,5	2	2,5	3	4	4,5

(۱) ۳/۵

(۲) ۴

(۳) ۵/۵

(۴) ۵/۷۵

- ۲۸- می‌خواهیم قاعده زیر برای چند جمله‌ای‌های با حداکثر درجه، به جای تابع  $f$ ، دقیق باشد. گزینه صحیح برای مقادیر  $a$  و  $b$  کدام است؟

$$\int_a^\pi \sin x f(x) dx \approx af(0) + bf'(\pi)$$

(۱)  $a = b = 1$

(۲)  $a = 2, b = \pi$

(۳)  $a = 1 - \pi, b = 1 + \pi$

(۴)  $a = \pi, b = 1 - \pi$



۲۹- روش انتگرال گیری به صورت  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} f(x) dx \approx W_1 [f(\sqrt{a}) + f(\sqrt{b})]$  مدنظر است. مقادیر  $W_1$ ،  $a$  و  $b$  چقدر

باشند تا این روش برای توابع خطی دقیق باشد؟

(۱)  $b = \frac{4}{9}$ ،  $a = 0$ ،  $W_1 = 1$

(۲)  $a = b = \frac{2}{3}$ ،  $W_1 = 1$

(۳)  $a = b = \frac{1}{3}$ ،  $W_1 = 2$

(۴)  $b = 1$ ،  $a = 0$ ،  $W_1 = 2$

۳۰- روش‌های تخمین انتگرال نقطه میانی، ذوزنقه‌ای و سیمسون را روی یک بازه  $[a, b]$  به ترتیب با  $M$ ،  $T$  و  $S$  نشان دهید. در این صورت،  $S$  برابر است با .....

(۱)  $\frac{1}{3}(T+M)$

(۲)  $\frac{2}{3}(T+M)$

(۳)  $\frac{1}{3}T + \frac{2}{3}M$

(۴)  $\frac{1}{6}T + \frac{2}{3}M$

میانی ماتریس‌ها و جبر خطی:

۳۱- بُعد زیر فضای تولیدشده توسط  $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$  و  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$  و  $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$  و  $\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$  کدام است؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

۳۲- فرض کنید  $U$  و  $V$  دو زیرفضای برداری چهاربعدی متمایز از  $\mathbb{R}^5$  باشند. بعد  $U \cap V$  برابر با کدام یک از اعداد زیر است؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

۳۳- کدام گزینه شرط وجود جواب برای دستگاه معادلات خطی  $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 6 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$  است؟

(۱)  $b = 2a + c$

(۲)  $b = 2a - c$

(۳)  $b = 2(c - a)$

(۴)  $b = 2(a + c)$

۳۴- اگر  $T: V \rightarrow V$  یک تبدیل خطی روی فضای برداری  $n$  بعدی  $V$  روی میدان  $\mathbb{F}$  با مشخصه ۲ باشد، به طوری که  $T^2 = I$  قرار دهید  $W = \{v \in V \mid T(v) = v\}$ ، آنگاه برای  $\dim W$  چه می‌توان گفت؟

(۱)  $\dim W \geq \frac{n}{2}$

(۲)  $\dim W < \frac{n}{2}$

(۳)  $\dim W = n - 1$

(۴)  $\dim W = n$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

۳۵- دترمینان ماتریس مقابل کدام است؟

(۱)  $-3$

(۲)  $0$

(۳)  $3$

(۴)  $-48$

۳۶- فرض کنید  $W$  زیر فضایی از ماتریس‌های  $n \times n$  باشد که اعضای آن متقارن هستند، و چندجمله‌ای ویژه آن‌ها به شکل  $x^n + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-3}x^{n-3} + \dots + a_1x + a_0$  باشند، در این صورت بعد  $W$  روی  $\mathbb{R}$  کدام است؟

(۱)  $\frac{(n-1)^2}{4}$

(۲)  $\frac{n(n+2)}{4}$

(۳)  $\frac{n(n-1)}{2}$

(۴)  $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$

۳۷- فرض کنید  $V = \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7$  یک فضای برداری روی  $\mathbb{Z}_7$  باشد و  $W$  زیر فضایی از  $V$  است. تعریف می‌کنیم

{ به ازای هر  $(a', b') \in W$  و  $(a, b) \in V$  |  $aa' + bb' = 0$  } .  $W' =$  کدام گزاره صحیح است؟

$$(1) \quad W \cap W' = \{0\}$$

$$(2) \quad \dim_{\mathbb{Z}_7} W + \dim_{\mathbb{Z}_7} W' = 2$$

(3)  $W'$  زیر فضایی از  $V$  نمی‌باشد.

(4) به ازای هر زیر فضای  $W$  از  $V$  داریم،  $W \neq W'$

۳۸- ماتریس  $X$  را خود توان گوئیم هرگاه  $X^2 = X$ . فرض کنید  $A$  و  $B$  دو ماتریس حقیقی  $n \times n$  باشند به طوری که  $A$  و  $B$  و  $A+B$  خود توان هستند. آنگاه:

$$(1) \quad \text{tr}(AB) = 0$$

$$(2) \quad \text{tr}(A) = \text{tr}(B)$$

(3)  $I+A$  خود توان است.

(4)  $I+A-B$  خود توان است.

۳۹- فرض کنید  $V = \mathbb{R}[x]$  مجموعه چند جمله‌ای‌های با ضرایب حقیقی باشد و همچنین

$$P_{1394}(x) = \{f(x) \in V \mid \deg f(x) \leq 1394\} \text{ چنانچه } W = \{f(x) \in P_{1394}(x) \mid f(2) = 0\}$$

$\dim_{\mathbb{R}} W$  برابر است با:

$$(1) \quad 1392$$

$$(2) \quad 1393$$

$$(3) \quad 1394$$

$$(4) \quad 1395$$

۴۰- فرض کنید  $U$  و  $V$  دو زیر فضای برداری غیرمشمول در همدیگر از  $\mathbb{R}^n$  باشند، در این صورت همه موارد زیر صحیح‌اند، به‌غیر از: ( $A \Delta B$  تفاضل متقارن دو مجموعه  $A$  و  $B$  است).

$$(1) \quad \langle U \cup V \rangle = U + V$$

$$(2) \quad \langle U \cap V \rangle = U \cap V$$

$$(3) \quad \langle U \Delta V \rangle = U \Delta V$$

$$(4) \quad \langle U \setminus V \rangle = U$$

۴۱- فرض کنید  $\mathbb{R}^+$  مجموعه تمام اعداد حقیقی مثبت باشد. برای هر  $x, y \in \mathbb{R}^+$  تعریف کنید  $x + y = xy$  و برای هر  $r \in \mathbb{R}$  و هر  $x \in \mathbb{R}^+$  تعریف کنید  $rx = x^r$ . در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

(1)  $\mathbb{R}^+$  روی  $\mathbb{R}$  یک فضای برداری از بعد ۱ است.

(2)  $\mathbb{R}^+$  روی  $\mathbb{R}$  یک فضای برداری نیست.

(3)  $\mathbb{R}^+$  روی  $\mathbb{R}$  یک فضای برداری ۲ بعدی است.

(4)  $\mathbb{R}^+$  روی  $\mathbb{R}$  یک فضای برداری از بعد نامتناهی است.

۴۲- اگر  $A^T = A$  و  $A \in M_n(\mathbb{C})$  در این صورت کدام یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

(۱)  $\text{rank}(A) = \text{tr}(A^T)$

(۲)  $(\text{tr}A)^T = (\text{tr}A^T)^T$

(۳)  $(\text{tr}A^T)^T = (\text{tr}A)^T$

(۴)  $\text{rank}(A^T) = \text{tr}(A^T)$

۴۳- فرض کنید  $A$  یک ماتریس حقیقی  $7 \times 7$  باشد و  $A^T = 5A^2 - 6A$  اگر  $\text{tr}(A) = 8$  آنگاه رتبه  $A$  برابر است با:

(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۴

(۴) ۵

۴۴- فرض کنید  $A$  ماتریسی  $10 \times 10$  باشد که عناصر روی قطر آن ۱ است و بقیه درآیه‌های آن ۱- هستند. در این صورت مجموع درآیه‌های وارون  $A$  برابر است با:

(۱)  $-\frac{3}{2}$

(۲) -۱

(۳)  $-\frac{5}{4}$

(۴)  $-\frac{3}{4}$

۴۵- فرض کنید  $A = \begin{pmatrix} 1394 & 1 & \sqrt{2} & -4 \\ 4 & 1395 & 9 & \sqrt{5} \\ -\sqrt{7} & 3 & 1396 & 96 \\ 13 & 97 & \sqrt{3} & 1397 \end{pmatrix}$  در این صورت داریم:

(۱)  $A$  وارون ناپذیر و ۱ مقدار ویژه آن می‌باشد.

(۲)  $A$  وارون پذیر است و ۱ مقدار ویژه آن می‌باشد.

(۳)  $A$  وارون ناپذیر است و ۱ مقدار ویژه آن نمی‌باشد.

(۴)  $A$  وارون پذیر است و ۱ مقدار ویژه آن نمی‌باشد.