

107F

نام :

نام خانوادگی :

محل امضاء :

صبح جمعه

۹۲/۱۲/۱۶

دفترچه شماره (۱)



جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
سازمان سنجش آموزش کشور

اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می شود.

امام خمینی (ره)

آزمون ورودی
دوره های دکتری (نیمه متمرکز) داخل
سال ۱۳۹۳

آمار
(کلیه گرایش ها) (کد ۲۲۳۲)

مدت پاسخگویی: ۱۵۰ دقیقه

تعداد سؤال: ۴۵

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	مجموعه دروس تخصصی (آنالیز ریاضی ۱- ریاضی عمومی ۱- احتمال و کاربرد آن - آمار ریاضی ۱ «بدون مبحث برآوردیابی» - استنباط آماری ۱)	۴۵	۱	۴۵

اسفندماه سال ۱۳۹۲

این آزمون نمره منفی دارد.

استفاده از ماشین حساب مجاز نمی باشد.

۱- مقدار $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} \right)$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$

(۲) ۱

(۳) $\ln(\sqrt{2}+1)$

(۴) موجود نیست.

۲- شعاع همگرایی سری $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{kx^k}{3^k}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{3}$

(۲) $\frac{2}{3}$

(۳) $\frac{4}{3}$

(۴) ۳

۳- میانگین تابع $f(x) = (\cos x - x)^2$ روی بازه $[-\pi, \pi]$ کدام است؟

(۱) $\frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2}$

(۲) $\frac{1}{3} - \frac{\pi}{6}$

(۳) $\frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{3}$

(۴) $\frac{\pi}{6} + \frac{1}{3}$

۴- حجم حاصل از دوران سطح محدود به محور y ها و خط $y = 2$ و دایره به مرکز $(2, 0)$ و شعاع ۲ حول محور x ها کدام است؟

(۱) $\frac{\pi}{8}$

(۲) $\frac{\pi}{10}$

(۳) $\frac{\pi}{24}$

(۴) $\frac{\pi}{56}$

۵- حاصل انتگرال $\iint_{|x|+|y|\leq 1} (|x|+|y|)dxdy$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{3}$

(۲) $\frac{2}{3}$

(۳) $\frac{4}{3}$

(۴) $\frac{5}{3}$

۶- در فضای متریک (X,d) کدام گزینه صحیح است؟ (E° نشان دهنده مجموعه نقاط درونی E و E' نشان دهنده مجموعه نقاط حدی E است.)

(۱) اگر $E^\circ = \emptyset$ آنگاه $X \setminus E$ در X چگال است.

(۲) اگر E حداکثر شمارا باشد آنگاه $X \setminus E$ در X چگال است.

(۳) اگر $E' = \emptyset$ آنگاه $X \setminus E$ در X چگال است.

(۴) هیچ کدام

۷- مقدار $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e - (1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}$ کدام است؟

(۱) e

(۲) $\frac{e}{2}$

۸- مقدار $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(2\pi en!)$ کدام است؟

(۱) 2π

(۲) π

(۳) صفر

(۴) حد ندارد.

۹- مقدار $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln 2}{2n} + \frac{\ln 3}{3n} + \dots + \frac{\ln n}{n^2} \right)$ کدام است؟

(۱) e^{-1}

(۲) 0

(۳) 1

(۴) ∞

۱۰- فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک همبند و $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته باشد. کدام گزینه صحیح است؟

(۱) اگر X حداکثر شمارا باشد آنگاه f یک تابع ثابت است.

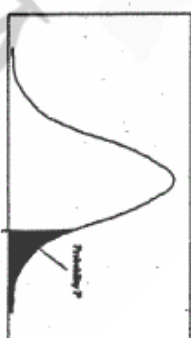
(۲) اگر $f(X)$ حداکثر شمارا باشد آنگاه f یک تابع ثابت است.

(۳) اگر X فشرده باشد آنگاه $f(X)$ یک بازه بسته در \mathbb{R} است.

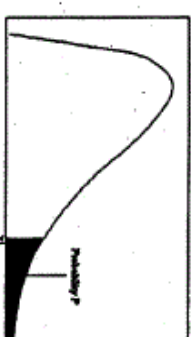
(۴) همه موارد



سطح زیر منحنی نرمال استاندارد



مقادیر بحرانی توزیع z



مقادیر بحرانی توزیع مربع کای

z	0.0	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9700	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9935
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9958	.9959	.9960	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9978	.9979	.9980	.9981	.9981	.9982
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9983	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9990	.9990	.9990
3.1	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993	.9993
3.2	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997	.9997	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

df	.10	.05	.025	.01	.005
1	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756

df	.995	.990	.975	.950	.900	.850	.800	.750	.700
1	48.5	0.0001	0.0009	0.0039	3.8414	5.0238	6.6349	7.879	10.596
2	0.010	0.0201	0.0506	0.1025	5.9914	7.3777	9.2103	10.596	12.838
3	0.071	0.1148	0.2158	0.3518	7.8147	9.3484	11.344	12.838	14.860
4	0.206	0.2971	0.4844	0.7107	9.4877	11.143	13.276	14.860	16.749
5	0.411	0.5343	0.8312	1.1454	11.070	12.832	15.086	16.749	18.547
6	0.675	0.8720	1.1373	1.6353	12.591	14.449	16.811	18.547	20.277
7	0.989	1.2390	1.6898	2.1673	14.067	16.012	18.475	20.277	21.954
8	1.344	1.6665	2.1797	2.7326	15.507	17.534	20.090	21.954	23.589
9	1.734	2.0879	2.7003	3.3251	16.918	19.022	21.665	23.589	25.188
10	2.155	2.5582	3.2469	3.9403	18.307	20.483	23.209	25.188	26.756
11	2.603	3.0534	3.8157	4.5748	19.675	21.920	24.724	26.756	28.299
12	3.075	3.5705	4.1069	5.2260	21.026	23.336	26.216	28.299	29.819
13	3.565	4.1069	4.5087	5.9818	22.362	24.735	27.688	29.819	31.319
14	4.074	4.6604	5.6287	6.5706	23.684	26.118	29.141	31.319	32.801
15	4.600	5.2293	6.2621	7.2609	24.995	27.488	30.577	32.801	34.267
16	5.142	5.8122	6.9076	7.9616	26.296	28.845	31.999	34.267	35.718
17	5.697	6.4077	7.5641	8.6717	27.587	30.191	33.408	35.718	37.156
18	6.264	7.0149	8.2307	9.3904	28.869	31.526	34.805	37.156	38.582
19	6.843	7.6327	8.9065	10.117	30.143	32.852	36.190	38.582	39.996
20	7.433	8.2604	9.5907	10.850	31.410	34.169	37.566	39.996	41.401
21	8.033	8.8972	10.282	11.591	32.678	35.478	38.932	41.401	42.795
22	8.642	9.5424	10.982	12.338	33.924	36.780	40.289	42.795	44.181
23	9.260	10.195	11.688	13.090	35.172	38.075	41.638	44.181	45.558
24	9.886	10.856	12.401	13.848	36.415	39.354	42.979	45.558	46.927
25	10.52	11.523	13.119	14.611	37.652	40.646	44.314	46.927	48.289
26	11.16	12.198	13.843	15.379	38.885	41.923	45.641	48.289	49.644
27	11.80	12.878	14.573	16.151	40.113	43.194	46.962	49.644	50.993
28	12.46	13.564	15.307	16.927	41.337	44.460	48.278	50.993	52.335
29	13.12	14.256	16.047	17.708	42.556	45.722	49.587	52.335	53.671
30	13.78	14.953	16.790	18.492	43.772	46.979	50.892	53.671	

۱۱- ذره‌ای واقع بر مبدأ با احتمال p و $q = 1 - p$ روی محور x ها به ترتیب یک واحد به سمت راست یا یک واحد به سمت چپ حرکت می‌کند. احتمال این که ذره پس از $2k$ حرکت ($k > 5$)، 10 واحد از مبدأ دور شده باشد کدام است؟

$$(1) \binom{2k}{k+5} p^{k+5} q^{k-5}$$

$$(2) \binom{2k}{k+5} p^{k-5} q^{k+5}$$

$$(3) \binom{2k}{k+5} p^k q^k (p^{10} + q^{10})$$

$$(4) \binom{2k}{k+5} p^{k-5} q^{k-5} (p^{10} + q^{10})$$

۱۲- فرض کنید $A_n = \{n\}_1^\infty$ دنباله‌ای از پیشامدهای مستقل و با احتمال

$$P(A_n) = \frac{1}{n+1}$$

باشند، مقدار $P(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_n)$ کدام است؟

$$(1) e^{-1}$$

$$(2) 1 - e^{-1}$$

$$(3) 0$$

$$(4) 1$$

۱۳- فرض کنید $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ یک فضای نمونه و $F = \{\emptyset, \Omega, \{1, 2\}, \{3, 4\}\}$

یک σ -میدان تعریف شده بر روی Ω باشد. اگر (Ω, F, P) یک فضای

احتمال باشد، کدام یک از توابع زیر یک متغیر تصادفی نیست؟

$$(1) X(i) = i$$

$$(2) X(i) = 2$$

$$(3) X(1) = X(2) = 10; X(3) = X(4) = 5$$

$$(4) X(1) = X(2) = X(3) = X(4) = 5$$

۱۴- طول یک مسیر چند بار اندازه‌گیری شده و میانگین اندازه‌ها ثبت می‌شود تا دقت

اندازه‌گیری افزایش یابد. در هر بار اندازه‌گیری خطایی تصادفی به اندازه ε رخ

می‌دهد که دارای میانگین صفر و انحراف معیار ۲ است. اگر این مسیر را ۳۶ بار

اندازه‌گیری کنیم، احتمال تقریبی اینکه میانگین اندازه‌ها کمتر از 0.6 واحد از

طول واقعی مسیر اختلاف داشته باشد، کدام است؟

$$(1) 0.9228$$

$$(2) 0.9282$$

$$(3) 0.95$$

$$(4) 0.975$$

۱۵- فرض کنید X یک متغیر تصادفی با $P[X \geq 1] = 1$ ، اگر

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} E \left[\frac{1}{X} I \left(X \geq \frac{n+2}{n+1} \right) \right] = b$$

باشد، مقدار b کدام است؟

(۱) $b = 0$

(۲) $0 < b < 1$

(۳) $b = 1$

(۴) $b \geq 1$

۱۶- فرض کنید $0 < x < y < 1$ ، $f_{X|Y=y}(x) = \frac{1}{y}$ ، توزیع Y به شرط $X = x$

$$\begin{cases} f_{X|Y=y}(x) = \frac{1}{y} \\ f_Y(y) = 2y \end{cases}$$

کدام است؟

(۱) $u(x, 1)$

(۲) $\text{Beta}(1, x)$

(۳) $u(1, x+1)$

(۴) $\text{Beta}(1, x+1)$

۱۷- فرض کنید $X \sim N(0, 1)$ و Z مستقل از X دارای تابع احتمال زیر باشد،

$$P[Z = 1] = 1 - P[z = -1] = p, \quad (0 < p \leq \frac{1}{2})$$

اگر $Y = XZ$ ، مقدار

$P(X + Y \neq 0)$ کدام است؟

(۱) $1 - p$

(۲) $1 - 2p$

(۳) p

(۴) $2p$

۱۸- فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل و هم توزیع $N(0, 1)$ باشند و

تعریف کنید:

$$W = \begin{cases} X, & XY > 0 \\ -X, & XY < 0 \end{cases}$$

توزیع W کدام است؟

(۱) نمایی

(۲) $N(0, 1)$

(۳) برنولی

(۴) دو جمله‌ای

۱۹- فرض کنید X_1, X_2, X_3 یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع احتمال زیر باشد

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & x=0 \\ \frac{2}{3} & x=1 \\ 0 & \text{سایر موارد} \end{cases}$$

تابع مولد گشتاور $Y = X_1 X_2 X_3$ کدام است؟

(۱) $1 + 2e^t$

(۲) $\frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{3t}$

(۳) $\frac{19}{27} + \frac{8}{27}e^t$

(۴) $(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^t)^3$

۲۰- فرض کنید Z_1, Z_2, \dots یک دنباله از آزمایش‌های مستقل برنولی با پارامتر p

باشند و X_1, X_2, \dots به ترتیب زمان اولین، دومین و ... موفقیت باشند. تابع

احتمال توأم $P(X_1 = k_1, \dots, X_n = k_n)$ کدام است؟

(۱) $p^{\sum k_i - n} (1-p)^n$

(۲) $p^n (1-p)^{\sum k_i - n}$

(۳) $p^{k_n - n} (1-p)^n$

(۴) $(1-p)^{k_n - n} p^n$

۲۱- فرض کنید $Y|X \sim N(-\frac{X^2}{2}, \theta X^2)$ و $X \sim \text{Exp}(1)$ ، مقدار $\text{Var}(Y)$

کدام است؟

(۱) 3θ

(۲) $2\theta + 5$

(۳) $4\theta + 1$

(۴) $\frac{\theta + 1}{2}$

۲۲- اگر X_1, X_2 نمونه‌ای تصادفی از توزیع نرمال استاندارد باشند، تابع مولد گشتاور

$Y = X_1 X_2$ کدام است؟

(۱) $(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}; -1 < t < 1$

(۲) $(1-2t)^{-\frac{1}{2}}; -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}$

(۳) $(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}; -1 < t < 1$

(۴) $(1-2t)^{-2}; -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}$

۲۳- فرض کنید ضریب همبستگی بین X و Y برابر ρ باشد، در این صورت یک کران بالا برای $E(\text{Var}(Y|X))$ کدام است؟

(۱) $\rho^2 \text{Var}(X)$

(۲) $\rho^2 \text{Var}(Y)$

(۳) $(1-\rho^2) \text{Var}(Y)$

(۴) $(1-\rho^2) \text{Var}(X)$

۲۴- فرض کنید $\{X_n\}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی با تابع احتمال زیر باشد،

توزیع حدی $\frac{X_n}{n}$ کدام است؟

$$P(X_n = k) = \left(\frac{\lambda}{n+\lambda}\right) \left(\frac{n}{n+\lambda}\right)^{k-1}, k = 1, 2, \dots$$

(۱) نمایی با میانگین λ

(۲) نمایی با میانگین $\frac{1}{\lambda}$

(۳) نمایی با میانگین 2λ

(۴) نمایی با میانگین $\frac{2}{\lambda}$

۲۵- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع برنولی با پارامتر $\frac{\theta_1}{\theta_1 + \theta_2}$ و Y_1, \dots, Y_n یک نمونه تصادفی از توزیع هندسی با پارامتر $\theta_1 + \theta_2$ باشند،

اگر دو نمونه از یکدیگر مستقل باشند، توزیع حدی $\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sum_{i=1}^n Y_i}$ کدام است؟

(۱) $N(\theta_1, \theta_1 \theta_2)$

(۲) $N(\theta_2, \theta_1 \theta_2)$

(۳) $N\left(\frac{\theta_1}{\theta_1 + \theta_2}, \theta_1 \theta_2\right)$

(۴) $N\left(\frac{\theta_1}{\theta_1 + \theta_2}, \frac{\theta_1 \theta_2}{(\theta_1 + \theta_2)^2}\right)$

۲۶- فرض کنید X دارای تابع احتمال زیر است:

$$P_{\theta}(X = -1) = \theta, P_{\theta}(X = x) = (1 - \theta)^2 \theta^x, x = 0, 1, 2, \dots; \theta \in \left[\frac{1}{3}, 1\right)$$

در صورت مشاهده $X = 1$ ، برآورد ماکزیمم درستنمایی برای $1 - \theta$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{3}$

(۲) $\frac{1}{2}$

(۳) $\frac{2}{3}$

(۴) $\frac{3}{4}$

۲۷- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع نمایی با میانگین θ و M

یک مقدار مثبت ثابت باشد، اگر در نمونه مشاهده شود تعداد X_i های کوچکتر و

مساوی M برابر k باشد، برآورد ماکزیمم درستنمایی (MLE) پارامتر θ

بر حسب مشاهدات کدام است؟

(۱) $\frac{kM}{n}$

(۲) $\frac{nM}{k}$

(۳) $\frac{-M}{\ln\left(\frac{k}{n}\right)}$

(۴) $\frac{-M}{\ln\left(1 - \frac{k}{n}\right)}$

۲۸- شخصی هر روز حداقل θ دقیقه و حداکثر ۱۲ دقیقه منتظر تاکسی می ماند تا به

محل کار خود برود. در پنج روز گذشته او ۴، ۶، ۱۰، ۷ و ۸ دقیقه منتظر تاکسی

بوده است. برآوردهای ماکسیمم درستنمایی ($\hat{\theta}$) و گشتاوری ($\tilde{\theta}$) پارامتر θ

کدام است؟

(۱) $(\tilde{\theta}, \hat{\theta}) = (4 \text{ و } 10)$

(۲) $(\tilde{\theta}, \hat{\theta}) = (4 \text{ و } 4)$

(۳) $(\tilde{\theta}, \hat{\theta}) = (2 \text{ و } 4)$

(۴) $(\tilde{\theta}, \hat{\theta}) = (2 \text{ و } 10)$

۲۹- فرض کنید Y دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای N و p_1 است و X به شرط

$Y = y$ دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای y و p_2 است، که در آن N و p_1

معلوم هستند، آماره بسنده برای p_2 کدام است؟

(۱) X

(۲) (X, Y)

(۳) $X + p_1 Y$

(۴) $\left(\frac{X + Y}{2}\right)$

۳۰- فرض کنید توزیع X متعلق به خانواده زیر باشد. گزینه صحیح کدام است؟

$\theta \backslash X$	-۲	۰	۲
θ_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
θ_2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

(۱) X یک آماره کامل است.

(۲) X یک آماره کامل است ولی بسنده نیست.

(۳) $|X|$ یک آماره بسنده و کامل است.

(۴) $|X|$ یک آماره بسنده و کامل نیست.

۳۱- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه‌ی تصادفی از توزیع $N(\mu, 1)$ باشد. اگر \bar{X} ,

S^2 و \bar{X} به ترتیب میانگین، واریانس و میانه‌ی نمونه‌ای باشند، آنگاه مقدار

$\text{cov}(\bar{X}, \bar{X})$ و $E[\bar{X} - S^2 | \bar{X}]$ به ترتیب کدام است؟

(۱) $\bar{X} - \frac{1}{n}$ و ۰

(۲) $\bar{X} - 1$ و ۰

(۳) $\bar{X} - \frac{1}{n}$ و $\frac{1}{n}$

(۴) $\bar{X} - 1$ و $\frac{1}{n}$

۳۲- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع یکنواخت در فاصله‌ی

(θ_1, θ_2) باشد. برآوردگر UMVU برای پارامتر $\frac{1}{\theta_2 - \theta_1}$ کدام است؟

$X_{(1)} = \min(X_1, \dots, X_n)$

$X_{(n)} = \max(X_1, \dots, X_n)$

(۱) $\frac{n-1}{(n-2)(X_{(n)} - X_{(1)})}$

(۲) $\frac{n-2}{(n-1)(X_{(n)} - X_{(1)})}$

(۳) $\frac{n}{(n-2)(X_{(n)} - X_{(1)})}$

(۴) $\frac{n-2}{n(X_{(n)} - X_{(1)})}$

۳۳- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع $N(\theta, 1)$ باشد، برآوردگر UMVU برای پارامتر $\alpha = \Phi(c - \theta)$ کدام است؟ $\Phi(\cdot)$ تابع توزیع نرمال استاندارد است.

$$(۱) \Phi(c - \bar{x})$$

$$(۲) \Phi(\sqrt{n}(c - \bar{x}))$$

$$(۳) \Phi\left(\frac{c - \bar{x}}{\sqrt{1 - \frac{1}{n}}}\right)$$

$$(۴) \Phi\left(\frac{c - \bar{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}}\right)$$

۳۴- فرض کنید X_1, \dots, X_n ها یک نمونه تصادفی از خانواده توزیع‌های متقارن حول θ باشد. در این صورت برآوردگر یکنواخت با کمترین واریانس (UMVUE) برای θ کدام است؟

$$X_{1:n} = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$$

$$X_{n:n} = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$$

$$(۱) \bar{X}$$

(۲) میانه

$$(۳) \frac{X_{1:n} + X_{n:n}}{2}$$

(۴) وجود ندارد

۳۵- فرض کنید Y_1, \dots, Y_n نمونه‌ای تصادفی از توزیع گسسته زیر با پارامتر $\theta \in (0, 1)$ است؟ کران پائین کرامر راثو برای واریانس برآوردگر نا اریب برای θ کدام است؟

	۰	۱	۲
	$\frac{2-\theta}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{\theta}{3}$

$$\frac{\theta(2-\theta)}{n} \quad (1)$$

$$\frac{\theta(2-\theta)}{2n} \quad (2)$$

$$\frac{2\theta(2-\theta)}{2n} \quad (3)$$

$$\frac{\theta(1-\theta)}{2n} \quad (4)$$

۳۶- فرض کنید X دارای توزیع هندسی با میانگین $\frac{1}{p}$ باشد که $0 < p < 1$. برآورد

بیز پارامتر p تحت تابع زیان $L(a, p) = \frac{(p-a)^2}{p}$ بازای مقدار مشاهده

$x=1$ کدام است؟ توزیع پیشین p را توزیع بتا با پارامترهای α, α در نظر بگیرید. ($\alpha > 0$)

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{\alpha}{2\alpha+1} \quad (2)$$

$$\frac{\alpha}{\alpha+1} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2\alpha+1} \quad (4)$$

۳۷- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع نمایی با میانگین θ و $\tau = \frac{1}{\theta}$ دارای توزیع $\text{Gamma}(2, 1)$ باشد. تحت تابع زیان

$$L(\theta, \delta) = \left(\sqrt{\frac{\delta}{\theta}} - \sqrt{\frac{\theta}{\delta}} \right)^2$$

برآوردگر بیز θ کدام است؟

(۱) $\sqrt{\frac{n+1}{n}}(n\bar{x}+1)$

(۲) $\sqrt{\frac{n}{n+1}}(n\bar{x}+1)$

(۳) $\sqrt{\frac{n}{n+1}}(n\bar{x})$

۳۸- فرض کنید تک مشاهده X با توزیعی از خانواده زیر در دست است.

$\theta \backslash x$	-۱	۰	۱
۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

با تابع زیان جدول (A) نمایانگر مجموعه عملها است

$\theta \backslash A$	-۱	۰	۱
-۱	۰	۱	۴
۰	۱	۰	۱
۱	۴	۱	۰

برآورد بیز برای پارامتر θ کدام است، اگر توزیع پیشین به صورت

$$\pi(\theta_1) = \pi(\theta_0) = \pi(\theta_2) = \frac{1}{3}$$

(۱) $\delta(0) = \delta(1) = 0$

(۲) $\delta(0) = 1, \delta(1) = 0$

(۳) $\delta(0) = -1, \delta(1) = 0$

(۴) $\delta(0) = 1, \delta(+1) = 1$

۳۹- فرض کنید $X|\theta \sim U(0, \theta)$, $\theta \sim \Gamma(2, 1)$. تحت تابع زیان قدر مطلق خطا، برآوردگر بیز پارامتر θ کدام است؟

(۱) $X + \ln 2$

(۲) $X - \ln 3$

(۳) $X - \ln 2$

(۴) $X + \ln 3$

۴۰- فرض کنید $X|\theta \sim U(0, \theta)$, $\theta \sim \Gamma(2, \lambda)$ باشد. برآورد ML پارامتر λ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{X}$

(۲) $\frac{2}{X}$

(۳) X

(۴) $2X$

۴۱- فرض کنید $X \sim B(n, p)$ و $Y \sim B(n, 1-p)$ دو متغیر تصادفی مستقل از هم باشند. تحت تابع زیان توان دوم خطا برآوردگر مینیماکس p کدام است؟

(۱) $\frac{X - Y}{2n + \sqrt{2n}}$

(۲) $\frac{X - Y}{2n + \sqrt{2n}} + \frac{1}{2}$

(۳) $\frac{X - Y}{2n + \sqrt{2n}} + 1$

(۴) $\frac{X - Y}{n + \sqrt{n}} + \frac{1}{4}$

۴۲- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیعی از خانواده توزیع های F

باشد. برآوردگر $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ تحت تابع زیان توان دوم خطا در کدام یک از

خانواده های زیر مینیماکس نیست؟

(۱) $F = \{N(\theta, 1) | \theta > b, \text{ معلوم } b\}$

(۲) $F = \{N(\theta, 1) | \theta < a, \text{ معلوم } a\}$

(۳) $F = \{N(\theta, 1) | \theta \in R\}$

(۴) $F = \{N(\theta, 1) | a \leq \theta \leq b, \text{ معلوم } b, a\}$

۴۳- X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع پواسون با پارامتر λ است که $\lambda \in (0, M)$ و M یک عدد ثابت معلوم است. فرض کنید برآوردگرهایی به فرم $\delta_c(\bar{X}) = c\bar{X}$ مورد توجه باشند. برآوردگر مینیماکس برای λ ، تحت تابع زیان درجه دو، به ازای کدام مقدار c بدست می آید؟

$$c = M \left(\frac{n}{n+1} \right) \quad (۱)$$

$$c = \left(\frac{nM}{1+nM} \right) \quad (۲)$$

$$c = nM \quad (۳)$$

$$c = \frac{n}{M} \quad (۴)$$

۴۴- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع پواسون با میانگین θ باشد. تحت تابع زیان توان دوم خطا، کدام یک از برآوردگرهای زیر برای θ ناپذیرفتنی (غیر مجاز) است؟

$$\delta(\bar{x}) = \Delta \quad (۱)$$

$$\delta(\bar{x}) = \frac{\bar{x}+1}{2} \quad (۲)$$

$$\delta(\bar{x}) = \frac{\bar{x}-1}{2} \quad (۳)$$

$$\delta(\bar{x}) = \frac{\bar{x}+2}{2} \quad (۴)$$

۴۵- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع $N(0, \theta)$ باشد. کدام گزینه نادرست است.

$$(۱) \bar{X}^2 \text{ برای } \theta \text{ سازگار است.}$$

$$(۲) \bar{X}^2 \text{ UMVUE برای } \theta \text{ است.}$$

(۳) تحت تابع زیان درجه دوم، \bar{X}^2 برآوردگر روا (مجاز، پذیرفتنی) برای θ است.

(۴) تحت تابع زیان درجه دوم، در ردهی برآوردگرهای $a\bar{X}^2$ ، برآوردگر $\frac{n}{n+2}\bar{X}^2$

برای θ ، دارای کمترین ریسک است.