

کد کنترل

270

E



270E

نام:

نام خانوادگی:

محل امضا:

«اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.»  
امام خمینی (ره)

جمهوری اسلامی ایران  
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری  
سازمان سنجش آموزش کشور

صبح جمعه  
۱۳۹۶/۱۲/۴  
دفترچه شماره (۱)

**آزمون ورودی دوره دکتری (نیمه‌متمرکز) - سال ۱۳۹۷**

**رشته آمار (کد ۲۲۳۲)**

تعداد سؤال: ۴۵

مدت پاسخگویی: ۱۵۰ دقیقه

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	مجموعه دروس تخصصی: مبانی آنالیز ریاضی - ریاضی عمومی ۱ و ۲ - مبانی احتمال - احتمال ۱ و ۲ - استنباط آماری ۱	۴۵	۱	۴۵

این آزمون نمره منفی دارد.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

حق چاپ تکثیر و انتشار سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

\* داوطلب گرامی، عدم درج مشخصات و امضا در مندرجات جدول ذیل، به منزله عدم حضور شما در جلسه آزمون است.

اینجانب ..... با شماره داوطلبی ..... در جلسه این آزمون شرکت می‌نمایم.

امضا:

۱- فرض کنید  $\Psi(x) = \frac{d}{dx} \ln(\Gamma(x))$ ,  $x > 0$ ، که در آن  $\Gamma$  تابع گاما می‌باشد. تابع  $\Psi(x+1) - \Psi(x)$  کدام است؟

(۱)  $e^x$

(۲)  $\ln x$

(۳)  $\frac{1}{x}$

(۴)  $\frac{1}{x^2}$

۲- مقدار  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x}$  کدام است؟

(۱) ۰

(۲) ۱

(۳)  $+\infty$

(۴) موجود نیست.

۳- مقدار  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tan \frac{1}{n} \cdot \ln \left( \frac{1}{1 + \frac{2}{n}} \times \dots \times \frac{1}{1 + \frac{2}{n(n-1)}} \right)$  کدام است؟

(۱)  $2 \ln 2 + 1$

(۲)  $2 \ln 2 - 1$

(۳)  $1 + \frac{2}{2} \ln 2$

(۴)  $1 - \frac{2}{2} \ln 2$

۴- اگر  $y = x^y$ ، مقدار  $\frac{dy}{dx}$  در نقطه  $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$  کدام است؟

(۱) -۱

(۲) ۰

(۳) ۱

(۴) e

۵- مقدار سری  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n}{2n+1} \left(\frac{1}{3}\right)^n$  کدام است؟

(۱)  $\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}\pi}{6}$

(۲)  $\frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{2}$

(۳)  $\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{2}$

(۴)  $\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}\pi}{6}$

۶- مقدار  $\int_0^1 \log(1-x) dx$  کدام است؟

(۱)  $-\infty$

(۲)  $-1$

(۳)  $0$

(۴)  $1$

۷- معادله  $e^x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!}$  چند ریشه حقیقی دارد؟

(۱)  $0$

(۲)  $1$

(۳)  $2$

(۴)  $3$

۸- توابع  $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$  و  $g(x) = \frac{f(x)}{1-x}$  را برای  $|x| < 1$  در نظر بگیرید، تابع  $g(x)$  کدام است؟

(۱)  $\sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^i a_k\right) x^i$

(۲)  $\sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{i+1} a_k\right) x^i$

(۳)  $\sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^i (k+1)a_k\right) x^i$

(۴)  $\sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{i+1} (k+1)a_k\right) x^i$

۹- حجم جسم دوار حاصل از دوران ناحیه بین دو منحنی  $y = x^2$  و  $y = x^3$  حول محور  $y$ ها کدام است؟

(۱)  $\pi$

(۲)  $\frac{3\pi}{5}$

(۳)  $\frac{\pi}{2}$

(۴)  $\frac{\pi}{10}$

۱۰- مقدار  $\int_0^1 \int_0^1 \frac{\Delta x}{\sqrt{x} + y^{\Delta}} dy dx$  کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{2} \ln 2$

(۲)  $\frac{1}{3} \ln 2$

(۳)  $2 \ln 2$

(۴)  $3 \ln 2$

۱۱- به چند طریق می‌توان ۱۲ مهره یکسان را بین ۸ نفر تقسیم کرد به طوری که به هر نفر حداکثر ۲ مهره برسد؟

(۱) ۱۱۲

(۲) ۱۲۱

(۳) ۱۲۰

(۴) ۱۰۲

۱۲- اگر در یافته‌های مرتب شده  $x_{(9)}, x_{(10)}, x_{(11)}, x_{(9)}, x_{(10)}, x_{(11)}, 12, 13, 7, 11, 4, 6, 3, 1$  مقدار برد میان چارکی (IQR) برابر ۱۰ باشد، در این صورت مقدار  $x_{(9)}$  کدام است؟

(۱) ۱۴

(۲) ۱۵

(۳) ۱۶

(۴) ۱۷

۱۳- در شهری تعداد افراد دارای گروه خونی O و گروه خونی A تقریباً با هم برابرند. تعداد افراد گروه خونی B،  $\frac{1}{10}$  برابر تعداد افراد گروه خونی A و دو برابر تعداد افراد گروه خونی AB هستند. احتمال اینکه نوزادی که فرار است در این شهر تازه به دنیا آید دارای گروه خونی AB باشد، کدام است؟

(۲)  $\frac{2}{43}$

(۱)  $\frac{1}{43}$

(۴)  $\frac{4}{43}$

(۳)  $\frac{3}{43}$

۱۴- در یک مسابقه پینت‌بال، کیوان و کامران یکی پس از دیگری به سمت یکدیگر تیرهای رنگی پرتاب می‌کنند، هر کدام که زودتر بتواند تیررنگی را به دیگری بزند، برنده اعلام می‌شود. با فرض اینکه اصابت تیر به هر یک دارای احتمال مساوی  $p$  باشد و کیوان تیر اول را پرتاب کند، احتمال برنده شدن کامران کدام است؟

$$(۱) \frac{p}{1-(1-p)^2}$$

$$(۲) \frac{p^2}{1-(1-p)^2}$$

$$(۳) \frac{1-p}{1-(1-p)^2}$$

$$(۴) \frac{(1-p)p}{1-(1-p)^2}$$

۱۵- دو جعبه در اختیار داریم، در جعبه اول ۴ فیوز سالم و ۶ فیوز خراب و در جعبه دوم ۱۶ فیوز سالم و  $a$  فیوز خراب وجود دارد. یک فیوز از هر جعبه به تصادف انتخاب می‌کنیم، احتمال اینکه هر دو سالم یا هر دو خراب باشند،  $\frac{1}{3}$  است. مقدار  $a$  کدام است؟

$$(۱) ۱۰$$

$$(۲) ۱۲$$

$$(۳) ۱۴$$

$$(۴) ۱۶$$

۱۶- فرض کنید  $X$  یک متغیر تصادفی با توزیع پواسون و با واریانس یک باشد، مقدار متوسط فاصله  $X$  از میانگین آن کدام است؟

$$(۱) \frac{1}{e}$$

$$(۲) \frac{2}{e}$$

$$(۳) ۱$$

$$(۴) 2e$$

۱۷- فرض کنید  $X$  یک متغیر تصادفی با توزیع یکنواخت بر بازه  $[-1, 1]$  باشد. کدام یک از دو متغیر تصادفی زیر ناهمبسته هستند؟

$$(۱) X \text{ و } -X$$

$$(۲) X^2 \text{ و } X$$

$$(۳) X^3 \text{ و } X$$

$$(۴) X \text{ و } \sin(X)$$

۱۸- در دسته کلید شخصی  $n$  کلید وجود دارد که فقط یکی از آنها درب اتاق کارش را باز می‌کند. هر بار این شخص به تصادف و یک به یک هر یک از کلیدها را مستقل از یکدیگر امتحان می‌کند. واریانس تعداد دفعاتی که لازم است تا درب باز شود در صورتی که کلیدهای اشتباهی کنار گذاشته شوند، کدام است؟

$$(1) \frac{n(n-1)}{12}$$

$$(2) \frac{n(n+1)}{12}$$

$$(3) \frac{n^2-1}{12}$$

$$(4) \frac{n^2+1}{12}$$

۱۹- تعداد ۱۶ عدد به تصادف و با جایگذاری از مجموعه  $\{1, 2, \dots, 10\}$  انتخاب می‌شود. فرض کنید  $X$  تعدادی از این اعداد که کمتر یا مساوی پنج هستند و  $Y$  تعدادی که بیش از پنج هستند، باشند، کواریانس  $X$  و  $Y$  کدام است؟

$$(1) 2$$

$$(2) -2$$

$$(3) 4$$

$$(4) -4$$

۲۰- نقطه‌ای به تصادف در بازه  $[0, 1]$  انتخاب می‌کنیم و آن را  $t$  می‌نامیم. متغیر تصادفی  $S$  را سطح محصور بین منحنی  $y = x^3$  و محور  $x$ ها از نقطه صفر تا نقطه انتخاب شده  $t$  در نظر می‌گیریم. در این صورت تابع چگالی احتمال  $S$  کدام است؟

$$(1) \frac{-3}{(4s)^4}; 0 \leq s \leq 1$$

$$(2) \frac{-3}{(4s)^4}; 0 \leq s \leq \frac{3}{4}$$

$$(3) \frac{\sqrt{2}-3}{4}s^{-\frac{3}{4}}; 0 \leq s \leq \frac{1}{4}$$

$$(4) \left(\frac{1}{4s}\right)^{-\frac{3}{4}}; 0 \leq s \leq 1$$

۲۱- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  متغیرهای تصادفی نمایی مستقل با  $E(X_i) = \frac{1}{\lambda_i}$  ،  $i = 1, 2, \dots, n$  باشند. مقدار

$P(X_{(1)} = X_1)$  کدام است؟ ( $X_{(1)}$  آماره ترتیبی اول است)

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} \quad (1)$$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1}} \quad (2)$$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} \quad (3)$$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1}} \quad (4)$$

۲۲- فرض کنید  $X$  و  $Y$  دو متغیر تصادفی با تابع احتمال توأم زیر باشند. مقدار  $E[\text{cov}(Y, Y | X)]$  کدام است؟

$$f(x, y) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^y}{(y+1)!}, \quad x = 0, 1, \dots, y, \quad y = 0, 1, 2, \dots, \quad \lambda > 0$$

$$\lambda \quad (1)$$

$$\lambda^2 \quad (2)$$

$$\frac{\lambda}{2} \quad (3)$$

$$\frac{\lambda^2}{2} \quad (4)$$

۲۳- فرض کنید  $X$  و  $Y$  دو متغیر تصادفی مستقل از توزیع برنولی با پارامتر  $p$  باشند. مقدار  $E(XY | X+Y)$  کدام است؟

$$\begin{cases} 0 & x+y=2 \\ 1 & x+y=0,1 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} 0 & x+y=0,1 \\ 1 & x+y=2 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} 0 & x+y=2 \\ \frac{1}{2} & x+y=0,1 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} 0 & x+y=0,1 \\ \frac{1}{2} & x+y=2 \end{cases} \quad (4)$$

۲۴- فرض کنید  $X$  و  $Y$  دو متغیر تصادفی با تابع احتمال توأم زیر باشند. مقدار  $\lim_{n \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{n(n+1)}{X(1+X)} Y e^{-X} \right\}$  کدام است؟

$$P(X=i, Y=j) = \frac{2}{n(n+1)}, \quad j=1,2,\dots,i, \quad i=1,2,\dots,n$$

$$\frac{e}{e-1} \quad (1)$$

$$\frac{1}{e-1} \quad (2)$$

$$\frac{2}{e-1} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2(e-1)} \quad (4)$$

۲۵- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از توزیع پواسون با میانگین  $\theta$  باشد. همچنین فرض کنید  $\bar{X}_n$  میانگین نمونه است. توزیع مجانبی  $\sqrt{n} \left( \frac{1}{\bar{X}_n} - \frac{1}{\theta} \right)$  کدام است؟

$$N(0, 1) \quad (1)$$

$$N\left(0, \frac{1}{\theta^2}\right) \quad (2)$$

$$N\left(0, \frac{1}{\theta^2}\right) \quad (3)$$

$$N\left(0, \frac{1}{\theta^2}\right) \quad (4)$$

۲۶- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از توزیع نرمال با میانگین  $\mu$  باشد. اگر  $\bar{X}$  میانگین نمونه باشد، کدام یک از گزاره‌های زیر صحیح است؟

$$(1) \quad \bar{X} \text{ برای } \mu^2 \text{ بسنده است.}$$

$$(2) \quad \bar{X} \text{ برای } \mu^2 \text{ بسنده نیست.}$$

$$(3) \quad \bar{X}^2 \text{ برای } \mu \text{ بسنده است.}$$

$$(4) \quad \bar{X} \text{ برای } \mu^3 \text{ بسنده نیست.}$$

۲۷- فرض کنید  $X_j \sim P(\lambda \mu^{j-1})$ ،  $j=1, \dots, n$ ، متغیرهای تصادفی مستقل از هم باشند که در آن  $\lambda$  و  $\mu$  نامعلوم می‌باشند. آماره بسنده برای  $\mu$  و  $\lambda$  کدام است؟

$$(1) \quad (\sum X_j, \sum j^2 X_j)$$

$$(2) \quad (\sum (X_j - 1), \sum j X_j^2)$$

$$(3) \quad (\sum j X_j, \sum j^2 X_j)$$

$$(4) \quad (\sum X_j, \sum (j-1) X_j)$$



۲۸- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از توزیع  $U(0, \theta)$  باشد. اگر  $X_{(n)}$  بزرگ‌ترین آماره ترتیبی و  $M$  میانۀ نمونه باشد ( $n$  عددی فرد است)، مقدار  $E\left(\frac{M}{X_{(n)}}\right)$  کدام است؟

(۱) ۱

(۲)  $\frac{1}{n}$ (۳)  $\frac{n+1}{2n}$ (۴)  $\frac{n+1}{n}\theta$ 

۲۹- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد. برآورد گشتاوری  $\theta$  کدام است؟

$$f_{\theta}(x) = \frac{1}{\text{Beta}(\alpha, \alpha)} (x-\theta)^{\alpha-1} (1-x+\theta)^{\alpha-1}, \theta < x < \theta+1, \theta \in \mathbb{R}, \text{Beta}(\alpha, \alpha) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\alpha-1} dx$$

(۱)  $\bar{x}$ (۲)  $\bar{x} - \frac{1}{2}$ (۳)  $2\bar{x} - 1$ (۴)  $\bar{x} + \frac{1}{2}$ 

۳۰- اگر  $X$  دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد، تمام برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی (MLE) پارامتر  $\theta$  براساس تک مشاهده  $X = x$  کدام است؟ ( $\alpha \in [0, 1]$ )

$$f_{\theta}(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} e^{x-\theta} & x < \theta \\ \frac{1}{3} & \theta \leq x < \theta+1 \\ \frac{1}{3} e^{-(x-\theta-1)} & x \geq \theta+1 \end{cases}$$

(۱)  $\alpha x + 1$ (۲)  $\alpha x - 1$ (۳)  $x + \alpha$ (۴)  $x - \alpha$

۳۱- فرض کنید  $X$  دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد، اگر  $x = 7$  مشاهده شود برآورد ماکسیمم درست‌نمایی (MLE) پارامتر  $\theta$  کدام است؟

$$f_{\theta}(x) = \frac{(x-\theta)^2}{3}, \quad \theta-1 \leq x \leq \theta+2$$

(۱) ۸

(۲) ۲

(۳) ۵

(۴) ۷

۳۲- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  و  $Y_1, \dots, Y_n$  دو نمونه تصادفی مستقل از توزیع‌های نمایی به ترتیب با میانگین‌های  $\theta$  و  $\frac{1}{\theta}$  باشند. به ازای چه مقدار از آماره  $T = C \frac{\bar{X}}{\bar{Y}}$  یک برآوردگر نارایب  $\theta^2$  است؟ ( $n > 2$ )

(۱)  $\frac{n-2}{n}$

(۲)  $\frac{n-1}{n}$

(۳)  $\frac{n}{n-2}$

(۴)  $\frac{n}{n-1}$

۳۳- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از توزیع  $N(\theta, 1)$  باشد. UMVUE پارامتر  $\gamma(\theta) = P_{\theta}(X_1 > 2\theta)$  کدام است؟ ( $\Phi$  نمایانگر تابع توزیع نرمال استاندارد است)

(۱)  $\Phi\left(\sqrt{\frac{n}{n-1}}\bar{X}\right)$

(۲)  $1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{n-1}{n}}\bar{X}\right)$

(۳)  $\Phi\left(\sqrt{\frac{n-1}{n}}\bar{X}\right)$

(۴)  $1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{n}{n-1}}\bar{X}\right)$

۳۴- اگر  $X_1, \dots, X_n$  نمونه‌ای تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد، برآورد UMVU صدک  $p$  ام توزیع کدام است؟ ( $x_{1:n}$  و  $\bar{x}$  به ترتیب آماره ترتیبی اول و میانگین نمونه‌اند.)

$$f(x) = e^{-(x-\theta)}, \quad x > \theta$$

(۱)  $\bar{x} - \frac{1}{n}$

(۲)  $x_{1:n} - \frac{1}{n} - \ln(1-p)$

(۳)  $x_{1:n} - \frac{1}{n}$

(۴)  $\bar{x} - \frac{1}{n} - \ln(1-p)$

۳۵- فرض کنید  $X \sim N(\theta, 1)$  و  $h(\theta) = \theta^2$  باشد. مقدار تابع اطلاع فیشر  $h(\theta)$  کدام است؟

(۱)

(۲)  $\frac{1}{\theta^2}$

(۳)  $4\theta^2$

(۴)  $\frac{1}{4\theta^2}$

۳۶- فرض کنید  $\Lambda = \{a_1, a_2, a_3\}$ ،  $\Theta = \{\theta_1, \theta_2\}$ ، جدول زیان و تابع احتمال به صورت زیر باشند. با در نظر گرفتن پیشین یکنواخت تصمیم بیز کدام است؟

A \ $\Theta$	$\Lambda$			x \ $\theta$	$X$	
	$a_1$	$a_2$	$a_3$		$x_1$	$x_2$
$\theta_1$	۰	۱	۲	$\theta_1$	۰/۱	۰/۹
$\theta_2$	۲	۰	۱	$\theta_2$	۰/۹	۰/۱

(۱)  $d_{\pi}(x) = \begin{cases} a_2 & x = x_1 \\ a_1 & x = x_2 \end{cases}$

(۲)  $d_{\pi}(x) = \begin{cases} a_1 & x = x_1 \\ a_2 & x = x_2 \end{cases}$

(۳)  $d_{\pi}(x) = \begin{cases} a_2 & x = x_1 \\ a_3 & x = x_2 \end{cases}$

(۴)  $d_{\pi}(x) = \begin{cases} a_1 & x = x_1 \\ a_3 & x = x_2 \end{cases}$

۳۷- فرض کنید  $A = \{a_1, a_2\}$ ،  $\Theta = \{\theta_1, \theta_2\}$ ، جدول زیان و تابع احتمال به صورت زیر باشند. تصمیم مینیماکس (غیر تصادفی) کدام است؟

A \ \Theta	$a_1$	$a_2$	x \ \theta	۰	۱
	$\theta_1$	۱   ۰		$\theta_1$	۰٫۲
$\theta_2$	۲   ۳	$\theta_2$	۰٫۹	۰٫۱	

$$\delta_M(x) \equiv a_1 \quad (۱)$$

$$\delta_M(x) = \begin{cases} a_1 & x = 0 \\ a_2 & x = 1 \end{cases} \quad (۲)$$

$$\delta_M(x) \equiv a_2 \quad (۳)$$

$$\delta_M(x) = \begin{cases} a_2 & x = 0 \\ a_1 & x = 1 \end{cases} \quad (۴)$$

۳۸- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از توزیع پواسون با پارامتر  $\lambda$  باشد. اگر توزیع نمایی با پارامتر ۱ به عنوان توزیع پیشین برای  $\lambda$  در نظر گرفته شود، برآورد بیز برای  $\psi(\lambda) = e^{-\lambda}$  تحت تابع زیان مربع خطا کدام است؟

$$\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\bar{x}} \quad (۱)$$

$$e^{-\frac{\sum x_i + 1}{n+1}} \quad (۲)$$

$$\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{\sum x_i + 1} \quad (۳)$$

$$e^{-\bar{x}} \quad (۴)$$

۳۹- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از توزیع یکنواخت روی بازه  $(\theta, \infty)$  باشد و  $\theta$  خود دارای توزیع پیشین یکنواخت روی بازه  $(c, \infty)$  است. تابع زیان را به صورت  $L(\theta, \delta) = \left(\frac{\delta - \theta}{\theta}\right)^2$  در نظر بگیرید. برآورد بیز پارامتر  $\theta$  کدام است؟ ( $X_{(n)}$  آماره ترتیبی  $n$ ام است)

$$(1) \frac{n+1}{n} X_{(n)} \cdot c \frac{X_{(n)}^n - c^n}{X_{(n)}^{n+1} - c^{n+1}}$$

$$(2) \frac{n+1}{n} X_{(n)} \frac{X_{(n)}^n - c^n}{X_{(n)}^{n+1} - c^{n+1}}$$

$$(3) \frac{n+1}{n} X_{(n)} \cdot c \frac{X_{(n)}^n + c^n}{X_{(n)}^{n+1} + c^{n+1}}$$

$$(4) \frac{n+1}{n} X_{(n)} \frac{X_{(n)}^n + c^n}{X_{(n)}^{n+1} + c^{n+1}}$$

۴۰- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از توزیع یکنواخت روی بازه  $(\theta, \theta+1)$  باشد. اگر بدانیم  $\theta$  دارای تابع چگالی احتمال پیشین  $U(\theta, 1)$  است، برآورد بیز  $\theta$  تحت تابع زیان مربع خطا کدام است؟ ( $X_{(i)}$   $i$  امین آماره ترتیبی است)

$$(1) \frac{X_{(n)} + X_{(1)}}{2}$$

$$(2) \frac{X_{(n)} + X_{(1)} - 1}{2}$$

$$(3) \frac{\min(\theta, X_{(n)} - 1) + \max(1, X_{(1)})}{2}$$

$$(4) \frac{\max(\theta, X_{(n)} - 1) + \min(1, X_{(1)})}{2}$$

۴۱- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از توزیع  $\text{Bin}(1, \theta)$  باشد. اگر تابع زیان مربع خطا،  $\gamma(\theta) = \theta(1-\theta)$  و  $\hat{\theta}_B$  به ترتیب نمایانگر برآوردگرهای بیز  $\gamma(\theta)$  و  $\theta$  تحت تابع زیان مربع خطا با در نظر گرفتن پیشین یکنواخت و  $\hat{\theta}$  برآوردگر ML پارامتر  $\theta$  باشند، کدام گزینه با احتمال یک برقرار است؟

$$\gamma(\hat{\theta}_B) = \hat{\gamma}_B \quad (۱)$$

$$\gamma(\hat{\theta}) > \hat{\gamma}_B \quad (۲)$$

$$\gamma(\hat{\theta}_B) \neq \hat{\gamma}_B \quad (۳)$$

$$\gamma(\hat{\theta}) < \hat{\gamma}_B \quad (۴)$$

۴۲- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  نمونه‌ای تصادفی از توزیع  $\text{Exp}(1, \mu)$ ، با تابع چگالی احتمال زیر باشد. اگر  $x_{1:n}$  اولین آماره ترتیبی در این نمونه باشد. در کلاس برآوردگرهای  $\{c(x_{1:n} - \frac{1}{n}) : c > 0\}$  تحت تابع زیان مربع خطا، برآورد مینیماکس  $\mu$  کدام است؟

$$\frac{n}{n+1} \left( x_{1:n} - \frac{1}{n} \right) \quad (۱)$$

$$\left( x_{1:n} - \frac{1}{n} \right) \quad (۲)$$

$$\frac{n}{n+2} \left( x_{1:n} - \frac{1}{n} \right) \quad (۳)$$

$$\frac{n+1}{n} \left( x_{1:n} - \frac{1}{n} \right) \quad (۴)$$

۴۳- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع توزیع  $F$  باشد. برآوردگر مینیماکس  $P(X_1 \leq 0)$  با در نظر گرفتن تابع زیان مربع خطا کدام است؟ ( $T = \# \text{ of } X_i \leq 0$ )

$$\frac{T}{\sqrt{n}} \frac{1}{1+\sqrt{n}} + \frac{1}{2(1+\sqrt{n})} \quad (۱)$$

$$\frac{T}{n} \frac{1}{1+\sqrt{n}} + \frac{1}{2(1+\sqrt{n})} \quad (۲)$$

$$\frac{T}{\sqrt{n}} \frac{1}{1+\sqrt{n}} + \frac{1}{1+\sqrt{n}} \quad (۳)$$

$$\frac{T}{n} \frac{1}{1+\sqrt{n}} + \frac{1}{1+\sqrt{n}} \quad (۴)$$

۴۴- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از توزیع پاراتو با تابع چگالی احتمال زیر باشد. اگر  $T_1 = \frac{1}{n-1} \sum \ln \frac{x_i}{x_{(1)}}$ ،  $T_2 = \frac{1}{n} \sum \ln \frac{x_i}{x_{(1)}}$  و  $T_3 = \frac{1}{n+1} \sum \ln \frac{x_i}{x_{(1)}}$  باشند، تحت تابع زیان مربع خطا، گزینه صحیح کدام است؟

$$f_{\alpha, \sigma}(x) = \frac{\alpha \sigma^\alpha}{x^{\alpha+1}}, x \geq \sigma$$

(۱)  $T_1$  بر  $T_2$  غلبه اکید دارد و  $T_2$  مجاز (پذیرفتنی) نیست.

(۲)  $T_2$  بر  $T_3$  غلبه اکید دارد و  $T_3$  مجاز (پذیرفتنی) نیست.

(۳)  $T_2$  بر  $T_1$  غلبه اکید دارد و  $T_1$  مجاز (پذیرفتنی) نیست.

(۴)  $T_1$  بر  $T_3$  غلبه اکید دارد و  $T_3$  مجاز (پذیرفتنی) نیست.

۴۵- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از توزیع  $U(0, \theta)$  باشد. با تعریف  $\delta_1(\underline{X}) = (n+1)X_{(1)}$  و

$$\delta_2(\underline{X}) = 2\bar{X}$$

$$\delta_3(\underline{X}) = \frac{n+1}{n} X_{(n)}$$

$$\delta_4(\underline{X}) = \frac{n+2}{n+1} X_{(n)}$$

گزینه صحیح تحت تابع زیان مربع خطا کدام است؟

(۱)  $\delta_1(\underline{X})$  برآوردگر ناریب و مجاز (پذیرفتنی) برای  $\theta$  است.

(۲)  $\delta_4(\underline{X})$  برآوردگر اریب و مجاز (پذیرفتنی) برای  $\theta$  است.

(۳)  $\delta_2(\underline{X})$  برآوردگر ناریب و مجاز (پذیرفتنی) برای  $\theta$  است.

(۴)  $\delta_3(\underline{X})$  برآوردگر ناریب با کمترین واریانس و مجاز (پذیرفتنی) برای  $\theta$  است.

