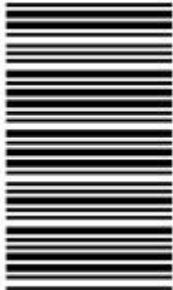


کد کنترل

272

E



272E

نام:

نام خانوادگی:

محل امضا:

<p>صبح جمعه ۱۳۹۶/۱۲/۴ دفترچه شماره (۱)</p>		<p>«اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.» امام خمینی (ره)</p> <p>جمهوری اسلامی ایران وزارت علوم، تحقیقات و فناوری سازمان سنجش آموزش کشور</p>		
<p><b>آزمون ورودی دوره دکتری (نیمه‌متمرکز) - سال ۱۳۹۷</b></p> <p><b>رشته ریاضی کاربردی (کد ۲۲۳۴)</b></p>				
<p>مدت پاسخگویی: ۱۵۰ دقیقه</p>	<p>تعداد سؤال: ۴۵</p>			
<p>عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤالات</p>				
ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	مجموعه دروس تخصصی: مبانی آنالیز ریاضی - آنالیز ریاضی - مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی - مبانی آنالیز عددی - آنالیز عددی پیشرفته - آنالیز حقیقی - تحقیق در عملیات پیشرفته ۱	۴۵	۱	۴۵
<p>این آزمون نمره منفی دارد.</p> <p>استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.</p>				
<p>حق چاپ، تکثیر و انتشار سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.</p>				

\* داوطلب گرامی، عدم درج مشخصات و امضا در مندرجات جدول ذیل، به منزله عدم حضور شما در جلسه آزمون است.

اینجانب ..... با شماره داوطلبی ..... در جلسه این آزمون شرکت می‌نمایم.

امضا:

- ۱- فرض کنید  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی یکنوا باشد. کدام گزینه پیوستگی  $f$  را نتیجه نمی‌دهد؟  
 (۱)  $f$  برد  $f$  بسته باشد.  
 (۲)  $f$  خاصیت مقدار میانی داشته باشد.  
 (۳) حد تابع  $f$  در هر نقطه بازه  $[a, b]$  موجود باشد.  
 (۴)  $f$  بر  $[a, b]$  دارای تابع اولیه باشد.
- ۲- فرض کنید  $A = \{1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$  زیر مجموعه اعداد حقیقی باشد.  $\bar{A}$  بستار  $A$  و  $\partial A$  مرز  $A$  است، کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟  
 (۱)  $A$  بسته نیست و  $\partial A \neq \bar{A}$   
 (۲)  $A$  بسته نیست و  $\partial A = \bar{A}$   
 (۳)  $A$  بسته است و  $\partial A = \bar{A}$   
 (۴)  $A$  بسته است و  $\partial A \neq \bar{A}$
- ۳- فرض کنید  $E$  زیر مجموعه‌ای از فضای متریک  $(X, d)$  است به طوری که  $\bar{E} = E$  و  $E^\circ = \emptyset$ . اگر  $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$  باشد، آنگاه کدام گزینه درست است؟  
 (۱)  $f$  فقط بر  $E^c$  پیوسته است.  
 (۲)  $f$  فقط بر  $E$  پیوسته است.  
 (۳)  $f$  همه جا پیوسته است.  
 (۴)  $f$  هیچ جا پیوسته نیست.
- ۴- فرض کنید  $d_1$  و  $d_2$  دو متر بر مجموعه ناتهی  $X$  باشند، به طوری که برای هر دنباله  $\{x_n\}$  در  $X$  و  $x \in X$  اگر  $d_1(x_n, x) \rightarrow 0$  آنگاه  $d_2(x_n, x) \rightarrow 0$  کدام گزینه نادرست است؟  
 (۱) اگر  $(X, d_1)$  همبند باشد، آنگاه  $(X, d_2)$  همبند است.  
 (۲) اگر  $(X, d_1)$  فشرد باشد، آنگاه  $(X, d_2)$  فشرد است.  
 (۳) اگر  $(X, d_1)$  کامل باشد، آنگاه  $(X, d_2)$  کامل است.  
 (۴) اگر  $E \subseteq X$  در  $(X, d_2)$  بسته باشد، آنگاه  $E$  در  $(X, d_1)$  بسته است.
- ۵- فرض کنید تابع  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  کراندار،  $a \in \mathbb{R}$  و  $A = \{\frac{f(a) - f(x)}{a - x} : x \in \mathbb{R}, x \neq a\}$  کدام گزینه درست است؟  
 (۱) اگر  $A$  بیکران باشد آن گاه  $f$  در  $a$  مشتق پذیر است.  
 (۲) اگر  $f$  در  $a$  مشتق پذیر باشد آن گاه  $A$  بیکران است.  
 (۳) اگر  $f$  در  $a$  مشتق پذیر باشد آن گاه  $A$  کراندار است.  
 (۴) اگر  $A$  کراندار باشد آن گاه  $f$  در  $a$  مشتق پذیر است.

۶- اگر  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی پیوسته باشد که برای هر  $x \in \mathbb{R}$ ،  $f(x) + x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t f(t) dt = 1$ ، کدام گزینه درست است؟

(۱)  $f$  بیکران است.

(۲)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  موجود است.

(۳)  $f$  بینهایت بار مشتق‌پذیر است.

(۴) مجموعه نقاطی که تابع  $f$  صفر می‌شود متناهی است.

۷- تابع  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  را در نظر بگیرید و قرار دهید  $f_n(x) = f(x^n)$  ( $n \geq 1$ ). کدام گزینه شرط لازم و کافی برای هم‌پیوستگی دنباله  $\{f_n\}$  است؟

(۲)  $f$  پیوسته باشد.

(۱)  $f$  کراندار باشد.

(۴)  $f$  تابع ثابت باشد.

(۳)  $f$  پیوسته یکنواخت باشد.

۸- به ازای چه مقادیری از  $a$  سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n \sin(na)}{n}$  همگرا می‌باشد؟

(۱)  $a \in \mathbb{Z}$

(۲)  $a \in \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

(۳)  $a \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\}$

(۴)  $a \in \mathbb{R}$

۹- تبدیل خطی  $\phi: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$  با ضابطه  $\phi(A) = A + A^T$  را در نظر بگیرید. رتبه  $\phi$  برابر است با:

(۱) ۳

(۲) ۴

(۳) ۵

(۴) ۶

۱۰- فرض کنید  $M_2(\mathbb{Q})$  فضای برداری ماتریس‌های  $3 \times 3$  روی میدان  $\mathbb{Q}$  است و داریم:

$$E = \left\{ \begin{bmatrix} a & c & b \\ b & a+c & b+c \\ c & b & a+c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Q} \right\}$$

$E$  یک زیرفضای برداری  $M_2(\mathbb{Q})$  است. بعد  $E$  چقدر است؟

(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۶

(۴) ۹

- ۱۱-  $\alpha = \{x, 2x+1\}$  و  $\beta = \{x+2, -x+1\}$  پایه های مرتب فضای برداری چندجمله ای ها با درجه حداکثر ۱ روی  $\mathbb{R}$  می باشند. ماتریس نمایش تبدیل خطی که پایه  $\beta$  را نظیر به نظیر به پایه  $\alpha$  می برد برابر است با:

$$(1) \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{2}{3} & -1 \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ -\frac{2}{3} & -1 \end{bmatrix}$$

$$(3) \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(4) \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

- ۱۲- فرض کنید  $A, B \in M_7(\mathbb{R})$  و  $\text{Tr}(AB) = 0$ . در این صورت کدام گزینه درست است؟

$$(1) A^T = B^T$$

$$(2) AB^T = B^T A$$

$$(3) A^T B^T = B^T A^T$$

$$(4) (AB)^T = (BA)^T$$

- ۱۳- فرض کنید  $A$  یک ماتریس  $3 \times 3$  با درایه های حقیقی باشد به طوری که  $\text{tr}(A^T) = 1$  و  $\text{tr}(A) = 0$  و  $\det A = 0$ . حاصل ضرب مقادیر ویژه ناصفر  $A$  برابر است با:

$$(1) -\frac{1}{2}$$

$$(2) \sqrt{2}$$

$$(3) \frac{1}{2}$$

$$(4) -\sqrt{2}$$

- ۱۴-  $V$  یک فضای برداری با بعد متناهی روی  $\mathbb{R}$  می باشد. فرض کنید  $T: V \rightarrow V$  تبدیل خطی است که برای هر  $v \in V$  داریم  $T(T(v)) = -v$  در این صورت  $\dim V$  کدام گزینه می تواند باشد؟

$$(1) 6$$

$$(2) 7$$

$$(3) 9$$

$$(4) 15$$

۱۵-  $I_3$  ماتریس همانی  $3 \times 3$  و  $J_3$ ، ماتریسی  $3 \times 3$  است که تمام درایه‌های آن ۱ می‌باشد. برای ماتریس زیر مجموع rank A و تکرر مقدار ویژه صفر کدام است؟

$$A = \begin{pmatrix} O & I_3 \\ J_3 & O \end{pmatrix}$$

(۱) ۵

(۲) ۶

(۳) ۷

(۴) ۸

۱۶- اگر A یک ماتریس مربعی حقیقی و غیر همانی باشد که  $A^t = A^2$  (ترانپوذه)، آنگاه مقادیر ویژه A کدام است؟

(۱) ۱ و ۲

(۲) ۲ یا -۲

(۳) ۱ یا ۰

(۴) ۰ و -۱

۱۷- در یک دستگاه ممیز شناور نرمال شده برای نمایش اعداد حقیقی در مبنای ۲ با  $10^6$  رقم مانتیس و روش بریدن در نمایش اعداد، فاصله بین عدد قابل نمایش  $2^P$ ، و  $P > 1$ ، و بزرگ‌ترین عدد قابل نمایش کوچک‌تر از  $2^P$  کدام است؟

(۴)  $2^{P-9}$ (۳)  $2^{P-10}$ (۲)  $2^{-10}$ (۱)  $2^{-9}$ 

۱۸- فرض کنید  $\alpha$  ریشه ساده معادله  $f(x) = 0$  و  $f''(\alpha) = 0$ . مرتبه همگرایی روش نیوتن برای محاسبه تقریبی از  $\alpha$  کدام است؟

(۴) دست کم ۳

(۳) دست کم ۲

(۲) خطی

(۱) ۲

۱۹- تقریب  $f(x) = \cos x$  درباره  $[0, 1]$  با قطعه‌های درونیاب خطی روی زیربازه‌ها با طول برابر مد نظر است. طول هر زیربازه دست کم چقدر باشد تا کران بالای خطای برشی ناشی از درونیاب‌های خطی روی هر زیربازه بیش از

 $10^{-8} \times \frac{1}{4}$  نباشد؟(۲)  $2 \times 10^{-4}$ (۱)  $4 \times 10^{-4}$ (۴)  $\frac{1}{2} \times 10^{-3}$ (۳)  $2 \times 10^{-3}$ 

۲۰- قاعده انتگرال‌گیری زیر را در نظر بگیرید:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{1}{2} \left[ af(-1) + bf\left(\frac{1}{3}\right) \right]$$

مقادیر a، b و k چقدر باشند تا این قاعده برای چندجمله‌ای‌هایی با بیشترین درجه ممکن k دقیق باشد؟

(۲)  $a=1, b=3, k=1$ (۱)  $a=1, b=3, k=2$ (۴)  $a=1, b=1, k=1$ (۳)  $a=1, b=1, k=2$



۲۱- برای چه مقادیر  $w_1$  و  $w_2$  روش انتگرال‌گیری  $\int_0^1 x\sqrt{x}f(x)dx \approx w_1f(0) + w_2f(1)$  برای توابع چندجمله‌ای

خطی دقیق است؟

$$w_2 = \frac{2}{5}, w_1 = \frac{4}{35} \quad (2)$$

$$w_2 = \frac{2}{5}, w_1 = \frac{2}{7} \quad (1)$$

$$w_2 = \frac{2}{7}, w_1 = \frac{4}{35} \quad (4)$$

$$w_2 = \frac{2}{7}, w_1 = \frac{2}{5} \quad (3)$$

۲۲- اگر  $\bar{x}$  جواب محاسبه شده برای یک مسأله و  $x$  جواب دقیق مسأله باشد و بتوان نشان داد که  $\|x - \bar{x}\| \leq 10^{-30} + 10^{-10}$  و  $\|\bar{x}\| > 10^{-7}$ ، آنگاه تعداد رقم‌های دهدهی یکسان در  $x$  و  $\bar{x}$  دست کم برابر است با .....

$$(1) 11$$

$$(2) 17$$

$$(3) 18$$

$$(4) 30$$

۲۳- درونیاب گویا به صورت  $\phi(x) = \frac{a+bx}{c+dx}$  برای نقاط  $(i, i^2)$ ،  $i = 0, 1, 2, \dots$ ،

(۱) وجود ندارد.

(۲) برابر  $\frac{3x}{5-2x}$  است.

(۳) یکتاست.

(۴) به تعداد نامتناهی وجود دارد.

۲۴- فرض کنید  $p(y)$  یک چند جمله‌ای درونیاب برای داده به صورت  $((y_i, y_i^2(2y_i - 1)))$ ، با  $y_i = i$ ،  $i = 0, 1, 2, 3$ ،  $y_i = i$  است. در این صورت،  $p(y)$  برابر است با .....

$$(1) y^2$$

$$(2) 2y^2$$

$$(3) 2y^2 - y^2$$

(۴) یک چندجمله‌ای از درجه ۴

۲۵- فرض کنید  $r(x) = x^2 - x$  چند جمله‌ای درونیاب در نقاط  $x_0 = 1$ ،  $x_1 = 2$ ،  $x_2 = 4$  و  $s(x) = \frac{4}{3}x^2 - 3x + \frac{1}{3}$  چندجمله‌ای درونیاب در نقاط  $x_0 = 1$ ،  $x_1 = 2$ ،  $x_2 = 4$  و  $x_3 = 5$  باشد. اگر  $p(x)$  چند جمله‌ای درونیاب درجه سه در چهار نقطه

$x_0, x_1, x_2, x_3$  باشد،  $p(3)$  کدام است؟

$$(2) \frac{35}{6}$$

$$(1) \frac{35}{8}$$

$$(4) \frac{35}{2}$$

$$(3) \frac{35}{4}$$

- ۲۶- فرض کنید  $\Delta = \left[0, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right]$  افزایشی از بازه  $[0, 1]$  و  $Y = \{y_0, y_1, y_2\}$  مقایر تابع  $f$  در نقاط  $x_i \in \Delta$  و  $S_{\Delta}(y; x)$  درونیاب اسپلاین درجه سه طبیعی به صورت زیر باشد:

$$S_{\Delta}(y; x) = \begin{cases} 1 + ax + bx^2 + cx^3, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -1 + d(x - \frac{1}{2}) + e(x - \frac{1}{2})^2 - 10(x - \frac{1}{2})^3, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

مقادیر  $b$  و  $e$  کدام است؟

$e = 20$  و  $b = 0$  (۲)

$e = 0$  و  $b = 20$  (۱)

$e = 5$  و  $b = 0$  (۴)

$e = b = 0$  (۳)

- ۲۷- در فرمول انتگرال گیری  $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \left[ \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x) dx + \int_{1-\varepsilon}^1 f(x) dx \right] + E(f)$  که  $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$  هسته پتانو،  $k(t)$  به ازای  $\varepsilon \leq t \leq 1 - \varepsilon$  کدام است؟

$\frac{1}{2}(1-t)^2(1-\frac{1}{2\varepsilon})$  (۲)

$\frac{1}{2}t(1-t)$  (۱)

$-\frac{1}{2}t(1-t) + \frac{1}{4}\varepsilon$  (۴)

$\frac{1}{2}t^2(1-\frac{1}{2\varepsilon})$  (۳)

- ۲۸- در محاسبه تخمینی برای انتگرال معین  $\int_0^{\pi} \sin^2 x \cos^2 x dx$  به روش دوزنقه‌ای مرکب روی  $n > 1$  زیر بازه با طول هر زیر بازه برابر با  $h = \frac{\pi}{2n}$ ، مرتبه خطا برابر است با ....

$h^2$  (۱)

$h^2$  (۲)

$h^4$  (۳)

$h^5$  (۴)

- ۲۹- در مورد زیرمجموعه‌های  $\mathbb{R}$  با اندازه لبگ، کدام گزینه درست است؟

(۱) مرز هر مجموعه نامشمار، اندازه پذیر است.

(۲) هر مجموعه نامشمار دارای زیرمجموعه‌ای با اندازه مثبت است.

(۳) هر مجموعه نامشمار دارای زیرمجموعه‌ای اندازه ناپذیر است.

(۴) خانواده‌ای نامشمار از زیرمجموعه‌های دوبه‌دو مجزا و اندازه پذیر با اندازه مثبت در  $[0, 1]$  وجود دارد.

- ۳۰- فرض کنید  $m$  اندازه لبگ بر  $\mathbb{R}$  باشد. اگر  $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  تابعی باشد که  $f \circ m$  (ترکیب  $f$  و  $m$ ) یک اندازه

است، در مورد  $f$  کدام گزینه درست است؟

(۲) لزوماً  $f$  تابع همانی یا تابع ثابت است.

(۱) صعودی است ولی لزوماً جمعی نیست.

(۴) جمعی و پیوسته است.

(۳) جمعی است ولی لزوماً پیوسته نیست.

۳۱- بازه  $[0, 1]$  با اندازه لبی  $m$  و مجموعه  $E = [0, \frac{1}{4}]$  را در نظر بگیرید. فرض کنید  $f_n(x) = \begin{cases} \chi_E(x) & n \text{ فرد} \\ 1 - \chi_E(x) & n \text{ زوج} \end{cases}$ .

دنباله  $\{f_n\}$  به طور نقطه وار همگرا ..... و دنباله عددی  $\left\{ \int_0^1 f_n dm \right\}$  همگرا .....

(۱) است، است.

(۲) نیست، است.

(۳) است، نیست.

(۴) نیست، نیست.

۳۲-  $\mathbb{R}$  با اندازه لبی را در نظر بگیرید. فرض کنید  $f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & 0 \leq x \leq 2^n \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$ . درباره دنباله  $\{f_n\}$  کدام گزینه درست است؟

(۱)  $f_n \rightarrow 0$  (در نرم  $L^2$ )، اما  $f_n \not\rightarrow 0$  (در اندازه).

(۲)  $f_n \rightarrow 0$  (در نرم  $L^2$ ) و  $f_n \rightarrow 0$  (در اندازه).

(۳)  $f_n \not\rightarrow 0$  (در نرم  $L^2$ ) و  $f_n \not\rightarrow 0$  (در اندازه).

(۴)  $f_n \rightarrow 0$  (در اندازه)، اما  $f_n \not\rightarrow 0$  (در نرم  $L^2$ ).

۳۳- فرض کنید  $\{f_n\}$  دنباله ای از توابع حقیقی نامنفی انتگرال پذیر بر یک فضای اندازه  $(X, S, \mu)$  باشد و

$$a_n = \int_X f_n d\mu$$

کدام گزینه درست است؟

(۱) اگر  $a_n \rightarrow 0$ ، آنگاه  $f_n \rightarrow 0$  (تقریباً همه جا).

(۲) اگر  $f_n \rightarrow 0$  (در اندازه)، آنگاه  $a_n \rightarrow 0$ .

(۳) اگر  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  همگرا باشد، آنگاه  $f_n \rightarrow 0$  (تقریباً همه جا).

(۴) اگر  $f_n \rightarrow 0$  (تقریباً همه جا)، آنگاه  $a_n \rightarrow 0$ .

۳۴- فرض کنید  $H$  یک فضای هیلبرت و  $x$  و  $y$  دو عضو متعامد ناصفر آن باشند. گزاره های زیر را در نظر بگیرید:

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x - y\|^2 \quad (\text{الف})$$

(ب)  $x$  و  $y$  مستقل خطی هستند.

کدام گزینه درست است؟

(۱) (الف) و (ب) هر دو درست هستند.

(۲) (الف) درست است اما (ب) نادرست است.

(۳) (ب) درست است اما (الف) نادرست است.

(۴) (الف) و (ب) هیچ کدام درست نیستند.



۳۵- فرض کنید  $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}^+$  دنباله‌ای اکیداً صعودی و همگرا به  $a \in \mathbb{R}^+$  باشد. عملگر خطی  $T: \ell^2 \rightarrow \ell^2$  را با ضابطه  $T(\{x_n\}) = \{a_n x_n\}$  ( $\{x_n\} \in \ell^2$ ) در نظر بگیرید. کدام گزینه درست است؟

(۱)  $T$  کراندار است و  $\|T\| = \sqrt{a}$ .

(۲)  $T$  کراندار است و  $\|T\| = a$ .

(۳)  $T$  کراندار است و  $\|T\| = a^2$ .

(۴)  $T$  بی کران است.

۳۶- فرض کنید  $S = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$  ناتهی است که در آن  $A$  یک ماتریس  $m \times n$  است. به علاوه، بردار ناصفر  $d \in \mathbb{R}^n$  وجود دارد به طوری که  $Ad = 0$ . آنگاه .....

(۱)  $S$  نقطه رأسی ندارد و بی کران است.

(۲)  $S$  نقطه رأسی ندارد ولی لزوماً بی کران نیست.

(۳)  $S$  می تواند نقطه رأسی داشته باشد ولی حتماً بی کران است.

(۴)  $S$  می تواند نقطه رأسی داشته باشد ولی لزوماً بی کران نیست.

۳۷- اگر در یکی از تکرارهای الگوریتم سیمپلکس، مقدار آزمون می نیمم کسر (مربوط به شدنی بودن) برای همه متغیرهای غیر پایه‌ای برابر با صفر باشد، آنگاه .....

(۱) ناحیه شدنی تنها یک نقطه ناتبه‌ایده دارد.

(۲) ناحیه شدنی تنها یک نقطه تباهیده دارد.

(۳) ناحیه شدنی ممکن است بیش از یک نقطه داشته باشد و همگی ناتبه‌ایده باشند.

(۴) ناحیه شدنی ممکن است بیش از یک نقطه با دست کم یک نقطه راسی تباهیده داشته باشد.

۳۸- فرض کنید جدول زیر بخشی از یک جدول سیمپلکس برای حل مسأله  $\begin{cases} \text{Min } z = c^T x \\ \text{s.t. } Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$  (P) است. آنگاه مقدار

متغیر  $x_5$  در هر جواب .....

	z	...	$x_5$	...	RHS
z	۱				
$x_5$	۰	۰	۱	۰	۰
$\vdots$	$\vdots$				
$\vdots$	$\vdots$				
$\vdots$	$\vdots$				

(۱) شدنی مسأله (P) صفر است.

(۲) شدنی رأسی مسأله (P) صفر است ولی در نقاط غیر

رأسی لزوماً صفر نیست.

(۳) بهینه مسأله (P) صفر است ولی در نقاط غیر بهینه

لزوماً صفر نیست.

(۴) تبه‌گن (تباهیده) مسأله (P) صفر است ولی در نقاط

ناتبه‌ایده لزوماً صفر نیست.

۳۹- مجموعه  $S$  به صورت  $S = \{x \mid Ax \leq b, L \leq x \leq U\}$  که در آن،  $A$ ،  $m \times n$ ،  $m < n$ ،  $m$  رتبه (A)،  $b \geq 0$  و

$L \leq U$  .....

(۱) همواره تهی است.

(۲) می تواند تهی یا ناتهی باشد.

(۳) همواره ناتهی است.

(۴) بی کران است.

۴۰- مدل برنامه ریزی خطی با متغیرهای کراندار زیر داده شده است (دقت کنید مسأله ماکزیم سازی است):

$$\text{Max } z = 2x_1 + 5x_2$$

$$\text{s.t. } 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 12$$

$$2x_1 + x_2 - x_4 = 4$$

$$1 \leq x_1 \leq 4, -2 \leq x_2 \leq 3, 0 \leq x_3 \leq 4, 0 \leq x_4 \leq 2$$

یک جواب پایه ای شدنی را در نظر بگیرید که در آن  $x_3$  و  $x_4$  متغیرهای پایه ای و  $x_1$  و  $x_2$  غیر پایه ای باشند که  $x_1$  در کران پایین و  $x_2$  در کران بالا قرار دارند. با شروع از این جواب پایه ای پس از یک تکرار روش سیمپلکس با متغیرهای کراندار، مقدار بهینه برابر است با .....

۱۶ (۲)

۴ (۱)

۳۶ (۴)

۱۸ (۳)

۴۱- مسئله (P) را به صورت

$$\text{Max } b^T v$$

$$\text{s.t. } A^T v \leq c \quad (P)$$

$$v \leq 0$$

با  $c \geq 0$  در نظر بگیرید و دوگان آن را (D) بنامید، در این صورت کدام مورد صحیح است؟

(۱) (D) می تواند بی کران باشد.

(۲) مسئله (D) یا جواب بهینه دارد یا ناشدنی است.

(۳) (P) و (D) هر دو جواب بهینه دارند.

(۴) اگر  $b \leq 0$  آن گاه (D) ناشدنی است.

۴۲- مسئله (P) را به صورت

$$\text{Min } Z = c^T x$$

$$\text{s.t. } Ax \geq b \quad (P)$$

$$x \geq 0$$

با  $b \leq 0$  و  $c \geq 0$  در نظر بگیرید. قید جدید  $d^T x \geq 0$  با  $d \geq 0$  را به مسئله (P) اضافه کنید و مسئله جدید را

(P') بنامید. کدام مورد صحیح است؟

(۱) دوگان (P') می تواند ناشدنی باشد.

(۲) (P) و (P') هر دو جواب های بهینه دارند.

(۳) (P) می تواند جواب بهینه داشته باشد ولی (P') جواب بهینه نداشته باشد.

(۴) (P') می تواند جواب بهینه داشته باشد ولی (P) جواب بهینه نداشته باشد.

۴۳- اگر یک مسئله برنامه ریزی خطی اولیه جواب بهینه داشته باشد و متغیر جدیدی همراه با ضرایب مربوط در تابع

هدف و قیدها به مسأله اضافه شود، آن گاه دوگان مسئله جدید .....

(۱) شدنی است.

(۲) می تواند بی کران باشد.

(۳) یا ناشدنی است یا بی کران.

(۴) یا جواب بهینه دارد یا ناشدنی است.

۴۴- یک مسئله برنامه ریزی خطی، ماتریس پایه بهینه  $B = [a_4, a_2, a_3]$  و  $B^{-1}$  (وارون پایه) به صورت زیر هستند:

$$\text{Min } z = x_1 - 2x_2$$

$$\text{s.t. } x_1 + x_2 - x_3 = 2$$

$$-x_1 - x_2 - x_4 = 1$$

$$x_2 + x_5 = 3$$

$$x_1, \dots, x_5 \geq 0$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

اگر قید جدید به صورت  $b_4 \leq x_3 + 5x_2 - 4x_1$  به مسئله اضافه شود، به ازای چه مقادیری از  $b_4$  پایه  $B$  همچنان بهینه می ماند؟

(۱)  $b_4 \geq 2$

(۲)  $b_4 \geq 16$

(۳)  $b_4 \leq 20$

(۴)  $b_4 \leq 12$

۴۵- برای روش سیمپلکس با متغیرهای کران دار، کدام مورد نادرست است؟

(۱) ماتریس های پایه ممکن است در دو افراز پایه ای شدنی متمایز، یکسان باشند.

(۲) در تباهیدگی ممکن است مقدار هیچ متغیر پایه ای صفر نباشد.

(۳) وقتی دو متغیر پایه ای همزمان به کران هاشان می رسند، الگوریتم متوقف می شود.

(۴) در برخی از تکرارها ممکن است مقدار متغیر واردشونده پس از محورگیری کاهش یابد.

