



671A

کد کنترل

671

A

صبح جمعه

۹۷/۱۲/۳

دفترچه شماره (۱)



جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
سازمان سنجش آموزش کشور

«اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.»
امام خمینی (ره)

آزمون ورودی دوره دکتری (نیمه‌متمرکز) - سال ۱۳۹۸

رشته ریاضی کاربردی - کد (۲۲۳۴)

مدت پاسخ‌گویی: ۱۵۰ دقیقه

تعداد سؤال: ۴۵

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤالات

| ردیف | مواد امتحانی | تعداد سؤال | از شماره | تا شماره |
|------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|----------|----------|
| ۱ | مجموعه دروس تخصصی: مبانی آنالیز ریاضی - آنالیز ریاضی - مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی - مبانی آنالیز عددی - آنالیز عددی پیشرفته - آنالیز حقیقی - تحقیق در عملیات پیشرفته ۱ | ۴۵ | ۱ | ۴۵ |

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

این آزمون نمره منفی دارد.

حق چاپ، تکثیر و انتشار سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

۱۳۹۸

* داوطلب گرامی، عدم درج مشخصات و امضا در مندرجات جدول ذیل، به منزله عدم حضور شما در جلسه آزمون است.

اینجانب با شماره داوطلبی در جلسه این آزمون شرکت می‌نمایم.

امضا:

۱- فرض کنید $f(x) = \int_2^{x^2} \int_0^s e^{-t^2} dt ds$. کدام گزینه درباره نمودار تابع f در بازه $[0, \infty)$ درست است؟

(۱) نزولی و مقعر است.

(۲) صعودی و مقعر است.

(۳) نزولی و محدب است.

(۴) صعودی و محدب است.

۲- مجموعه $\left\{ a \in [0, \infty) : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(a+1) \cdots (a+n)} < \infty \right\}$ کدام است؟

(۱) $(1, \infty)$

(۲) $[1, \infty)$

(۳) $[e, \infty)$

(۴) \emptyset

۳- کدام گزینه درباره انتگرال ناسره $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx$ درست است؟

(۱) همگرای مطلق و مقدار آن بزرگ‌تر از صفر است.

(۲) همگرای مشروط و مقدار آن برابر صفر است.

(۳) همگرای مطلق و مقدار آن برابر صفر است.

(۴) واگرا است.

۴- فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای کراندار از اعداد حقیقی باشد و $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ و $\alpha = \sup A$. کدام گزینه درست است؟

(۱) اگر $\alpha \notin A$ آنگاه $\alpha = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$.

(۲) اگر جملات دنباله $\{a_n\}$ متمایز باشند، آنگاه $\alpha = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$.

(۳) اگر مجموعه حدود زیر دنباله‌ای $\{a_n\}$ نامتناهی باشد، آنگاه $\alpha = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$.

(۴) اگر $\{a_n\}$ زیردنباله‌ای صعودی داشته باشد، آنگاه $\alpha = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$.

۵- فرض کنید $f: X \rightarrow Y$ یک تابع پیوسته بین دو فضای متریک باشد. آنگاه:

(۱) برای هر مجموعه باز $U \subseteq X$ ، $f(U)$ در Y باز است.

(۲) برای هر مجموعه فشرده $K \subseteq X$ ، $f(K)$ در Y فشرده است.

(۳) برای هر مجموعه بسته $U \subseteq X$ ، $f(U)$ در Y بسته است.

(۴) برای هر مجموعه فشرده $K \subseteq Y$ ، $f^{-1}(K)$ در X فشرده است.

۶- در فضای متریک \mathbb{R} با متر اقلیدسی، کدام گزینه نادرست است؟

(۱) هر زیرمجموعه ناشمارای \mathbb{R} ، نقطه حدی در \mathbb{R} دارد.

(۲) هر زیر مجموعه نامتناهی و همبند \mathbb{R} ، نقطه حدی گویا دارد.

(۳) هر زیر مجموعه ناشمارا از اعداد گنگ، نقطه حدی گویا دارد.

(۴) هر زیر مجموعه نامتناهی و کراندار \mathbb{R} ، نقطه حدی در \mathbb{R} دارد.

۷- فرض کنید (X, d) یک فضای متریک نامتناهی باشد به طوری که برای هر $A, B \subseteq X$ ، $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ ، کدام

گزینه درست است؟

(۱) X همبند است.

(۲) X مجموعه‌ای شمارا است.

(۳) هر دنباله کوشی در X همگرا است.

(۴) هر تابع دلخواه $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته است.

۸- سری $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin^{2n}(x) \cos^2(x)$ را بر بازه $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ در نظر بگیرید. کدام گزینه درست است؟

(۱) سری همگرای نقطه‌ای نیست.

(۲) سری به طور مطلق همگرای یکنواخت است.

(۳) سری همگرای نقطه‌ای است اما همگرای یکنواخت نیست.

(۴) سری همگرای یکنواخت است اما به طور مطلق همگرای یکنواخت نیست.

۹- فرض کنید V فضای برداری ماتریس‌های 2×2 روی میدان اعداد حقیقی است و داریم:

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

در این صورت بعد $U + W$ کدام است؟

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

۱۰- در فضای برداری $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ حداکثر چند زیرفضای غیریکریخت می توان یافت؟

(۱) mn

(۲) $m+n$

(۳) $m+n+1$

(۴) $(m+1)(n+1)$

۱۱- فرض کنید $\eta: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_{n-1}(\mathbb{R})$ تبدیلی باشد به طوری که $\eta(A)$ از حذف سطر اول و ستون اول ماتریس A به دست آمده باشد. بعد هسته η برابر است با:

(۱) $2n$

(۲) $2n-1$

(۳) $(n-1)^2$

(۴) $\frac{n(n-1)}{2}$

۱۲- اگر $S, T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ با ضابطه های $S \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x+y \\ x+y \end{bmatrix}$ و $T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -x+y \end{bmatrix}$ داده شده باشند، چند جمله ای

مشخصه ماتریس ST کدام است؟

(۱) $x^2 + 2x - 3$

(۲) $x^2 + 2x + 3$

(۳) $x^2 - 2x - 3$

(۴) $x^2 - 2x + 2$

۱۳- فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ دارای دو مقدار ویژه λ_1 و λ_2 باشد که $\lambda_1 < \lambda_2$. در این صورت اگر W_{λ_i} که

$1 \leq i \leq 2$ فضای ویژه نظیر مقدار ویژه λ_i باشد، $\dim W_{\lambda_2} - \dim W_{\lambda_1}$ کدام است؟

(۱) -1

(۲) 0

(۳) 1

(۴) 2

۱۴- فرض کنید P_n فضای برداری تمام چند جمله ای های با ضرایب حقیقی و با درجه کمتر یا مساوی n روی میدان اعداد حقیقی باشد. نگاشت $T: P_5 \rightarrow P_3$ را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$T(a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) = (a_5 - a_4)x^3 + (a_4 - a_3)x + a_0.$$

اگر $S: P_3 \rightarrow P_3$ تابع مشتق باشد در این صورت $\dim \ker(ST)$ کدام است؟

(۱) 1

(۲) 2

(۳) 3

(۴) 4

۱۵- فرض کنید A ماتریسی 7×7 با درایه‌های حقیقی باشد. در این صورت کدام یک از تساوی‌های زیر می‌تواند درست باشد؟

$$(1) A^2 + 2A + 3I = 0$$

$$(2) A^2 + 2A + 5I = 0$$

$$(3) A^2 - 2A + 4I = 0$$

$$(4) A^2 - 2A + 2I = 0$$

۱۶- فرض کنید A ماتریسی 4×4 باشد که درایه‌های آن به دلخواه با اعداد $1, 2, \dots, 16$ پر شده است به طوری که هر عدد دقیقاً یکبار ظاهر شده است. اگر J ماتریسی 4×4 باشد که تمام درایه‌هایش ۱ هستند. در این صورت ماکزیمم مقدار ویژه AJ کدام است؟

$$(1) 500$$

$$(2) 544$$

$$(3) 600$$

$$(4) 944$$

۱۷- دنباله تولید شده از $x_{k+1} = \frac{1}{2}(x_k + 1), k = 0, 1, \dots$ با شروع از یک نقطه مناسب x_0 وقتی به کمینه کننده تابع $f(x) = (x-1)^2$ همگرا شود، نرخ همگرایی مجانبی از مرتبه دارد.

$$(1) 1$$

$$(2) 2$$

$$(3) 3$$

$$(4) \text{زیرخطی}$$

۱۸- فرض کنید $f(x) = x^m - x^n$ که در آن $m \neq n$ و m و n اعداد صحیح مثبت هستند. تابع $p(x)$ را چند جمله‌ای درون‌یاب از درجه کوچک‌تر یا مساوی با t به داده‌های متمایز $(x_i, f(x_i)), i = 1, \dots, t+1$ ، بگیرد. چند جمله‌ای $p(x)$ همان $f(x)$ است اگر

$$(1) t = m$$

$$(2) t = n$$

$$(3) t \geq \max(m, n)$$

$$(4) t = m - 1 \text{ وقتی } m > n$$

۱۹- مقادیر c_1 و c_2 به طوری که $\int_{-\pi}^{\pi} (e^x - (c_1 + c_2 \cos x))^2 dx$ کم‌ترین مقدار خود را اختیار کند. از حل دستگاه

$$\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

به دست می‌آیند. مقدار b_2 کدام است؟

$$(2) \frac{e^{\pi} + e^{-\pi}}{2}$$

$$(1) \frac{e^{-\pi} - e^{\pi}}{2}$$

$$(4) \frac{-e^{\pi} - e^{-\pi}}{2}$$

$$(3) \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2}$$

۲۰- فرمول $\frac{\frac{1}{3}f(x+h) - f(x) + \frac{2}{3}f(x-\frac{h}{2})}{(\frac{1}{2}h)^2}$ تخمینی برای است.

(۱) $f''(x)$ با خطای برشی $O(h^2)$

(۲) $f''(x)$ با خطای برشی $O(h)$

(۳) $f'(x)$ با خطای برشی $O(h)$

(۴) $f'(x)$ با خطای برشی $O(h^2)$

۲۱- مقدار تقریبی $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ با استفاده از روش دوزنقه‌ای کدام است؟

(۱) $\sqrt{\pi}$

(۲) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

(۳) $\frac{\sqrt{\pi}}{4}$

(۴) $\frac{\sqrt{2\pi}}{4}$

۲۲- فرض کنید $x > 0$ و محاسبه $A = \sqrt{x^2 + \frac{2}{x^2}} - \sqrt{x^2 - \frac{2}{x^2}}$ روی یک کامپیوتر با روند عددی یک برابر با u مدنظر است. یک فرمول جایگزین مناسب برای محاسبه A ، ...

(۱) $\frac{2}{x^2}$ است اگر $x > \left(\frac{2}{u}\right)^{\frac{1}{4}}$

(۲) $\frac{1}{x^2}$ است اگر $x > \left(\frac{2}{u}\right)^{\frac{1}{4}}$

(۳) $\frac{2}{x^2}$ است اگر $x > u^{\frac{1}{4}}$

(۴) $\frac{1}{x^2}$ است اگر $x > \left(\frac{u}{2}\right)^{\frac{1}{4}}$

۲۳- فرض کنید $L_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{x-x_j}{x_k-x_j}$ که $x_k = a + k\left(\frac{b-a}{n}\right)$ و $k = 0, 1, \dots, n$ و $w_k = \int_a^b L_k(x) dx$.

کدام یک از روابط زیر برقرار است؟

(۱) $w_k - w_{n-k} = L_k(x_k)$

(۲) $w_k = w_{n-k}$

(۳) $w_k + w_{n-k} = 1$

(۴) $w_k = w_{n-k-1}$

۲۴- به ازای چه مقدار از c روش دوزنقه‌ای برای تخمین انتگرال $\int_0^1 (x^5 - cx^4) dx$ دقیق‌تر از روش سیمسون است؟

(۱) $\frac{15}{14} < c < \frac{15}{74}$

(۲) $\frac{3}{10} < c < \frac{1}{3}$

(۳) $\frac{1}{120} < c < \frac{1}{48}$

(۴) $\frac{15}{14} < c < \frac{95}{74}$

۲۵- چند جمله‌ای درونیاب هرمیت مربوط به نقاط جدول زیر کدام است؟

| | | |
|---------|---|----|
| x_i | ۰ | ۱ |
| f_i | ۳ | ۴ |
| f'_i | ۲ | -۲ |
| f''_i | ۴ | - |

(۲) $-4x^3 + 2x^2 + 2x + 3$

(۴) $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 2x + 3$

(۱) $2x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 2x + 3$

(۳) $3x^4 - x^3 - 2x^2 + x + 3$

۲۶- فرض کنید f یک چند جمله‌ای تکی از درجه ۴ و P یک چند جمله‌ای از درجه ۳ باشد به طوری که $P(1) = f(1)$.

$P(0) = f(0)$ و $P'(0) = f'(0)$ ، کوچک‌ترین مقدار C که $|f(x) - P(x)| \leq C$ به ازای هر

$0 \leq x \leq 1$ کدام است؟

(۱) ۰

(۲) $\frac{3}{64}$

(۳) $\frac{21}{125}$

(۴) $\frac{27}{256}$

۲۷- فرض کنید P_3 یک چند جمله‌ای از درجه ۳ و P_4 چند جمله‌ای درونیاب P_3 در نقاط $x_0 = -h$ ، $x_1 = 0$ و

$x_2 = h$ باشد ($h > 0$). گزینه درست کدام است؟

(۱) $\int_{-h}^h P_4(x) dx = \int_{-h}^h P_3(x) dx$

(۲) $\int_{-h}^h P_4(x) dx = 2 \int_{-h}^h P_3(x) dx$

(۳) $\int_{-h}^h P_4(x) dx = \int_0^h P_3(x) dx$

(۴) $\int_{-h}^h P_4(x) dx = 2 \int_{-h}^h P_3(x) dx$

۲۸- هسته پتانو برای فرمول انتگرال گیری عددی $\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{3}{4}f(\frac{1}{3}) + \frac{1}{4}f(1)$ به ازای $t \geq \frac{1}{4}$ کدام است؟

$$(1) \frac{(1-t)^2(1-4t)}{24}$$

$$(2) \frac{(1-t)^2(4t-1)}{24}$$

$$(3) \frac{(1-t)^2}{24}$$

$$(4) \frac{(t-1)^2}{24}$$

۲۹- فرض کنید تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ انتگرال پذیر لبگ باشد. تابع $F: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ را با ضابطه

$$F(x) = \int_{(-\infty, x]} f dm$$

(۱) لزوماً پیوسته نیست.

(۲) همه جا مشتق پذیر است.

(۳) پیوسته یکنواخت است.

(۴) پیوسته است ولی لزوماً پیوسته یکنواخت نیست.

۳۰- فرض کنید (X, Σ, μ) یک فضای اندازه $0 < \varepsilon < \infty$ و $\{E_n\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های اندازه پذیر در X باشد به طوری که به ازای هر n ، $\mu(E_n) \leq \varepsilon$. مجموعه F را به صورت $\{x \in X: \text{تعلق دارد } E_n \text{ به تعداد نامتناهی}\}$ تعریف می‌کنیم. کدام گزینه درست است؟

(۱) مجموعه F لزوماً اندازه پذیر نیست.

(۲) مجموعه F اندازه پذیر است و $\mu(F) = \infty$.

(۳) اگر $\mu(X) < \infty$ آنگاه F اندازه پذیر است و $\mu(F) = 0$.

(۴) اگر $\mu(X) < \infty$ آنگاه F اندازه پذیر است و $\mu(F) \geq \varepsilon$.

۳۱- فرض کنید $\{f_n\}$ یک دنباله از توابع انتگرال پذیر نامنفی بر فضای اندازه (X, Σ, μ) و $f: X \rightarrow [0, 1]$ تابعی انتگرال پذیر باشد. کدام گزینه نادرست است؟

$$(1) \text{ اگر } \{f_n\} \text{ صعودی و } f_n \rightarrow f \text{ (نقطه‌ای) آنگاه } \int_X f_n d\mu \rightarrow \int_X f d\mu$$

$$(2) \text{ اگر } f_n \rightarrow f \text{ (یکنواخت) آنگاه } \int_X f_n d\mu \rightarrow \int_X f d\mu$$

$$(3) \text{ اگر } f_n \rightarrow f \text{ (تقریباً همه جا) آنگاه } \int_X f d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$$

$$(4) \text{ اگر } f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{ آنگاه } \int_X f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu$$

۳۲- اگر $f, g \in L^1[0,1]$ توابعی مثبت باشند و $fg \geq 1$ (تقریباً همه جا) روی $[0,1]$ ، کدام گزینه درست است؟ (m اندازه لیگ است).

$$(1) \int_{[0,1]} f dm \int_{[0,1]} g dm \geq 1$$

$$(2) \int_{[0,1]} f dm \int_{[0,1]} g dm \leq 1$$

$$(3) \int_{[0,1]} f dm \int_{[0,1]} g dm \leq \int_{[0,1]} fg dm$$

$$(4) \int_{[0,1]} f dm \int_{[0,1]} g dm \geq \int_{[0,1]} fg dm$$

۳۳- فرض کنید تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ انتگرال پذیر لیگ باشد و $p > 0$ در مورد همگرایی سری $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} f(kx)$ بر

\mathbb{R} کدام گزینه نادرست است؟

(۱) همگرای یکنواخت است.

(۲) در اندازه لیگ همگرا است.

(۳) در میانگین (در $L^1(\mathbb{R})$) همگرا است.

(۴) تقریباً همه جا به یک تابع انتگرال پذیر همگرا است.

۳۴- فرض کنید X و Y دو فضای باناخ و $T: X \rightarrow Y$ عملگری خطی و کراندار باشد به طوری که برای هر $x \in X$ ،

$$\|T(x)\| \geq 2\|x\|$$

(۱) T لزوماً یک به یک نیست.

(۲) T پوشا و یک به یک است.

(۳) برد T در Y بسته است و T یک به یک است.

(۴) برد T در Y چگال است ولی T لزوماً پوشا نیست.

۳۵- تابع خطی ψ را بر فضای هیلبرت $L^2[0,1]$ به صورت $(f \in L^2[0,1])$ $\psi(f) = \int_{[0,1]} f(t)t^2 dm(t)$ تعریف

می کنیم، کدام گزینه درست است؟ (m اندازه لیگ است).

$$(1) \|\psi\| = \frac{1}{\sqrt{10}} \text{ و } \psi \text{ پیوسته است}$$

$$(2) \|\psi\| = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ و } \psi \text{ پیوسته است}$$

$$(3) \|\psi\| = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ و } \psi \text{ پیوسته است}$$

(۴) ψ ناپیوسته است.

۳۶- مقدار بهینه برای مسأله

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 6x_4 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 10 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

برابر است با

۱ (۱)

۴ (۲)

۵ (۳)

 $\frac{40}{3}$ (۴)۳۷- فرض کنید مجموعه $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq 0, x \geq 0\}$ ناتهی است. تعداد نقاط رأسی (گوشه‌ای) این مجموعه برابر

است با

(۱) بی‌نهایت

(۲) عددی بزرگ‌تر از یک

(۳) یک

(۴) صفر

۳۸- مسأله اولیه (P) را به صورت

$$\begin{aligned} \min \quad & z = c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \quad (P) \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

با $b \geq 0$ در نظر بگیرید. مسأله مرحله یک (فاز یک) مربوط به (P) را برای تعیین شدنی یا ناشدنی بودن (P) به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \min \quad & w = \sum_{i=1}^m y_i \\ \text{s.t.} \quad & Ax + y = b \quad (M) \\ & x \geq 0 \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

اگر در روش سیمپلکس اولیه برای حل مسأله (M)، یک متغیر y_i در یک جدول سیمپلکس نامزد خروج از پایه شود، آن‌گاه(۱) حذف y_i از جدول مجاز نیست.

(۲) مسأله (M) و در نتیجه مسأله (P) شدنی است.

(۳) مسأله (M) و مسأله (P) هر دو می‌توانند ناشدنی باشند و حذف y_i از جدول مجاز نیست.(۴) می‌توان y_i و ستون وابسته به آن را از جدول حذف کرد، بدون آن که شدنی بودن برای مسأله (P) تغییر کند.

۳۹- فرض کنید جدول یکی از تکرارهای الگوریتم سیمپلکس برای حل مسأله مینیم سازی (با قیود کم تر یا مساوی) با قاعده ممانعت دوری Lexico به صورت زیر است. متغیر خارج شونده کدام است؟ (ماتریس B^{-1} زیر متغیرهای کمکی s_1 تا s_4 مربوط به قیدهای اول تا چهارم، قرار دارد.)

| | Z | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | s_1 | s_2 | s_3 | s_4 | RHS |
|-------|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| Z | ۱ | ۲ | -۱ | ۰ | ۰ | -۲ | ۰ | ۰ | -۳ | |
| x_3 | ۰ | ۱ | | | | ۰ | ۰ | ۰ | ۲ | ۲ |
| s_2 | ۰ | ۲ | | | | ۲ | ۱ | ۰ | ۲ | ۴ |
| s_3 | ۰ | ۳ | | | | ۰ | ۰ | ۱ | ۲ | ۶ |
| x_4 | ۰ | ۴ | | | | ۱ | ۰ | ۰ | ۲ | ۱۲ |

- (۱) x_4
- (۲) s_2
- (۳) s_3
- (۴) x_3

۴۰- کدام یک از بردارهای داده شده، یک جواب پایه ای شدنی به مفهوم الگوریتم سیمپلکس با متغیرهای کران دار برای مسأله زیر است؟

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & -3 \leq x_1 \leq 2 \\ & -3 \leq x_2 \leq 2 \\ & x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

- (۱) $(1, 0, 0)$
- (۲) $(0, 0, 1)$
- (۳) $(2, -3, 2)$
- (۴) $(-3, 0, 4)$

۴۱- مسأله زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 6x_3 + x_4 \leq 2 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

مقدار متغیر دوگان متناظر با قید دوم در جواب بهینه مسأله دوگان چند است؟

- (۱) c_1
- (۲) c_2
- (۳) c_3
- (۴) صفر

۴۲- مسأله $\max\{c^T x \mid Ax \geq b, x \geq 0\}$ را در نظر بگیرید که در آن $b \geq 0$ و $b \neq 0$. اگر در هر جواب بهینه این مسأله، مقدار همه متغیرهای کمکی (Slack) برابر با صفر باشد، مقدار بهینه برای تابع هدف این مسأله است.

(۱) صفر

(۲) عددی منفی

(۳) عددی مثبت

(۴) $+\infty$

۴۳- برای مسأله برنامه ریزی خطی به صورت

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= c^T x \\ \text{s.t. } Ax &\leq 0 \end{aligned}$$

می‌دانیم: $Ax \leq 0 \Rightarrow c^T x \leq 0$.

کدام گزینه درست است؟

(۱) $A^T v < 0$ جواب دارد.(۲) $v \leq 0$ وجود دارد به طوری که $A^T v = c$.(۳) $v \geq 0$ وجود دارد به طوری که $A^T v = c$.(۴) $A^T v = c$ جواب ندارد.

۴۴- مسأله برنامه ریزی خطی (P) را به صورت

$$\begin{aligned} \min z &= 0 \\ \text{s.t. } Ax &\leq b \quad (P) \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

در نظر بگیرید و دوگان آن را (D) بنامید. اگر (P) ناشدنی باشد، آن گاه

(۱) (D) بی کران است.

(۲) $A^T u \geq 0 \Rightarrow u \geq 0$.(۳) $A^T u \leq 0 \Rightarrow u = 0$.(۴) دستگاه $A^T u \leq 0$ جواب ناصفر ندارد.

۴۵- فرض کنید مسأله (P) به صورت

$$\begin{aligned} \min z &= c^T x \\ \text{s.t. } Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

جواب بهینه x^* دارد. قید جدید $d^T x \geq 0$ با بردار داده شده $d \geq 0$ را به مسأله (P) اضافه کنید و مسأله جدید را (P') بنامید. گزینه درست کدام است؟

(۱) x^* جواب بهینه برای (P') نیز هست.

(۲) (P') می‌تواند ناشدنی باشد.

(۳) (P') می‌تواند بی کران باشد.

(۴) (P') می‌تواند جواب بهینه \bar{x} داشته باشد به طوری که $c^T \bar{x} < c^T x^*$.