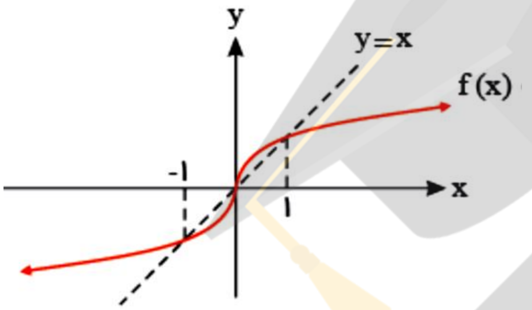
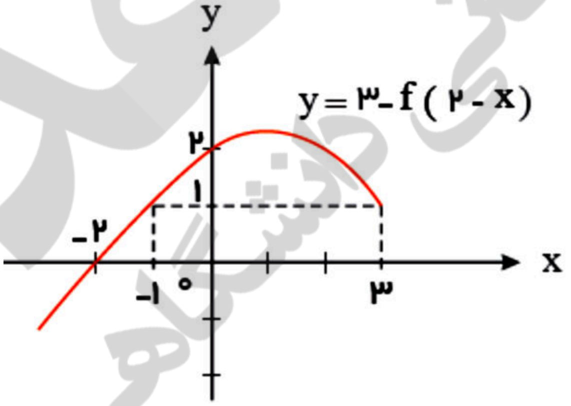
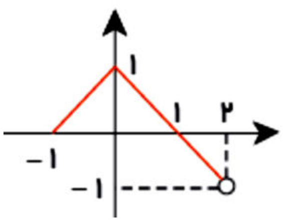
نام و نام خانوادگی:	نام درس: ریاضی ۳
مقطع و رشته: دوازدهم تجربی	نام دبیر: شهروز رحیمی
نام پدر:	ساعت امتحان: ۰۸:۰۰ صبح/ عصر
شماره داوطلب:	مدت امتحان: ۹۰ دقیقه
تعداد صفحه سؤال: ۲	

جمهوری اسلامی ایران
اداره ی کل آموزش و پرورش شهر تهران
اداره ی آموزش و پرورش شهر تهران منطقه ۱۲ تهران
دبیرستان غیردولتی پسرانه سرای دانش واحد حافظ
آزمون پایان ترم نوبت اول سال تحصیلی ۹۹- ۱۳۹۸

نمره به عدد:	نمره به حروف:	نمره تجدید نظر به عدد:	نمره به حروف:	محل مهر و امضاء مدیر
نام دبیر:	تاریخ و امضاء:	نام دبیر:	تاریخ و امضاء:	

ردیف	سؤالات	بارم
۱	اگر چند جمله ای $p(x)=x^3-ax^2+bx+1$ برچند جمله ای های $x-2$ و $x+1$ بخش پذیر باشد باقیمانده تقسیم $p(x)$ بر $2x-1$ کدام است؟	۱/۵
۲	نمودار f مطابق شکل زیر است ، دامنه تابع $y=\sqrt{\frac{f(x)-f(x)^{-1}}{x^2-1}}$ کدام است؟ 	۲
۳	اگر $f(x)=x^2-\sqrt{3x}$ و $g=\{(-2,0),(0,3),(1,-1),(3,-2)\}$ باشند، $f(g^{-1}(-2))$ کدام است؟	۲
۴	حدود m چقدر باشد تا $f=\{(5,3),(3,m^2-m),(-4,2),(4,m^2-m)\}$ یک تابع صعودی باشد.	۱/۵
۵	با توجه به نمودار $y=3-f(2-x)$ ، نمودار تابع $y=2-f(x+3)$ کدام است؟ 	۲
۶	اگر $f\left(\frac{-x}{x+1}\right)=\frac{1}{x+1}$ باشد، آنگاه $f(x)$ کدام است؟ $(x\neq 1)$	۲
۷	اگر نمودار تابع $f(x)$ بصورت مقابل باشد نمودار $fof(x)$ را رسم کنید. 	۲

۸	بازای چند مقدار a دو تابع زیر دوره تناوب یکسان دارند. $y_۲ = -۳\cos ۳ax - ۲$ و $y_۱ = -۲\sin((a^۲ + ۲)x) + ۳$	۱
۹	معادلات زیر رد بازه مورد نظرشان چند جواب دارند. $۲\sin^۲ x + ۳\cos x = ۳$ در بازهٔ $[-\pi, \pi]$ $\tan ۲x = ۳\tan x$ در بازهٔ $(۰, \frac{۵\pi}{۲})$	۴
۱۰	اگر برد تابع $y = -\lvert\cos x\rvert - 1$ بصورت $[a,b]$ حاصل $b - a$ کدام است؟	۱

جمع بارم : ۲۰ نمره

اداره ی کل آموزش و پرورش شهر تهران
اداره ی آموزش و پرورش شهر تهران منطقه ۱۲ تهران
دبیرستان غیر دولتی پسرانه سرای دانش واحد حافظ

کلید سؤالات پایان ترم نوبت اول سال تحصیلی ۹۹-۹۸

نام درس: ریاضی ۳
نام دبیر: شهروز رحیمی
ساعت امتحان: ۰۸:۳۰ صبح/ عصر
مدت امتحان: ۹۰ دقیقه

ردیف	راهنمای تصحیح	محل مهر یا امضاء مدیر

۱

چون $p(x)=x^3-ax^2+bx+1$ بر $x-2$ و $x+1$ بخش پذیر است، داریم:

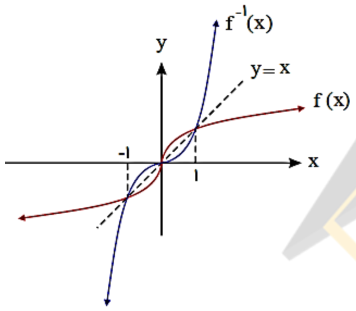
$$\left.\begin{array}{l} p(2)=0\Rightarrow 8-4a+2b+1=0\Rightarrow 4a-2b=9 \\ p(-1)=0\Rightarrow -1-a-b+1=0\Rightarrow a+b=0 \end{array}\right\}\rightarrow a=\frac{3}{2},\ b=-\frac{3}{2}$$

پس $p(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}x+1$ است.

$$2x-1=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}\Rightarrow p(\frac{1}{2})=\frac{1}{8}-\frac{3}{2}\times\frac{1}{4}-\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}+1=\frac{1}{8}-\frac{3}{8}-\frac{3}{4}+1=0$$

۲

ابتدا نمودار f^{-1} را رسم می‌کنیم و نمودار را در چهار بازهٔ زیر بررسی می‌کنیم:
می‌دانیم که زیر رادیکال همواره باید نامنفی باشد.



رابطه \ بازه	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
	x=-۱	x=۰	x=۱	
$f(x)-f^{-1}(x)$	+	−	+	−
x^2-1	+	−	−	+
$\frac{f(x)-f^{-1}(x)}{x^2-1}$	+	+	−	−

تعریف نشده (در $x=-1$) — تعریف نشده (در $x=1$)

بنابراین دامنهٔ تابع $y=\sqrt{\frac{f(x)-f^{-1}(x)}{x^2-1}}$ به‌صورت $(-\infty,0]-\{-1\}$ است.

۳

$$g=\{(-2,0),(0,3),(1,-1),(3,-2)\}\rightarrow g^{-1}=\{(0,-2),(3,0),(-1,1),(-2,3)\}$$

پس: $(fog^{-1})(-2)=f(g^{-1}(-2))=f(3)=9-\sqrt{9}=9-3=6$

۴

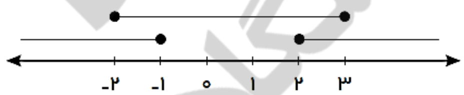
ابتدا xها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم.

$$f:\{(-4,2),(3,m^2-m),(4,m^2-m),(5,6)\}$$

می‌دانیم در تابع صعودی اگر $x_1<x_2$ باشد آن‌گاه $f(x_1)\le f(x_2)$ است پس:

$$2\le m^2-m\le 6\rightarrow\left\{\begin{array}{l} m^2-m\ge 2\rightarrow m^2-m-2\ge 0\rightarrow (m-2)(m+1)\ge 0 \\ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} m\le -1 \ \text{یا}\ m\ge 2 \quad (I) \\ m^2-m\le 6\rightarrow m^2-m-6\le 0\rightarrow (m-3)(m+2)\le 0 \\ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -2\le m\le 3 \quad (II) \end{array}\right.$$

از اشتراک جواب‌های (I) و (II) داریم:



$$\rightarrow m\in[-2,3]-(-1,2)$$

۵

$$y=3-f(2-x)\xrightarrow[\text{قرینه نسبت به }y\text{ها}]{x\to -x} y=3-f(2+x)\xrightarrow[\text{۱ واحد انتقال به چپ}]{x\to x+1} y=3-f(2+x+1)$$

$$\Rightarrow y=3-f(x+3)\xrightarrow{\text{یک واحد انتقال به پایین}} y=2-f(x+3)$$

۶

عبارت را ساده‌تر می‌کنیم تا دو طرف تساوی جملات مشابه داشته باشند بنابراین:

$$f\left(\frac{-x}{x+1}\right)=f\left(\frac{-x-1+1}{x+1}\right)=f\left(-1+\frac{1}{x+1}\right)$$

با فرض $\frac{1}{x+1}=t$ و $x\neq -1$ خواهیم داشت:

$$f(-1+t)=t\xrightarrow{t=u+1} f(u)=u+1\Rightarrow f(x)=x+1$$

۷

با توجه به شکل داریم:

$D_f = [-1, 2)$, $R_f = (-1, 1]$

$D_{fof} = x \in D_f; f \in [-1, 2) \to D_{fof} = [-1, 2)$

با توجه به نمودار تابع وقتی $-1 \leq x < 2$ است مقدار fof در بازه‌ی $[0, 1]$ تغییر می‌کند بنابراین برد تابع fof بازه‌ی $[0, 1]$ می‌باشد.

۸

$$y_1 = -2\sin((a^2+2)x) + 3 : T_1 = \frac{2\pi}{|a^2+2|}$$

$$y_2 = -3\cos 3ax - 2 : T_2 = \frac{2\pi}{|3a|}$$

$$\xrightarrow{T_1 = T_2} |a^2+2| = |3a| \Rightarrow \begin{cases} a^2+2 = 3a \Rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0 \\ a^2+2 = -3a \Rightarrow a^2+3a+2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a-1)(a-2) = 0 \\ (a+1)(a+2) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = -1, 1, -2, 2$$

۹

$$2\sin^2 x + 3\cos x = 3 \Rightarrow 2\sin^2 x + 3\cos x - 3 = 0 \Rightarrow 2(1-\cos^2 x) + 3\cos x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow 2 - 2\cos^2 x + 3\cos x - 3 = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} \cos x = 1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = 2k\pi \\ \cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \to x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

جواب‌های واقع در بازهٔ $[-\pi, \pi]$ عبارت‌اند از: $\frac{\pi}{3}$, 0 , $-\frac{\pi}{3}$

می‌دانیم $\tan 2a = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$ است.

$$\tan 2x = 3\tan x \to \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = 3\tan x \to 2\tan x = 3\tan x(1-\tan^2 x) \to 2\tan x = 3\tan x - 3\tan^3 x \to 3\tan^3 x - \tan x = 0 \to \tan x(3\tan^2 x - 1) = 0 \to \tan x = 0$$ یا

$$3\tan^2 x - 1 = 0$$

$$\tan x = 0 \to \frac{\sin x}{\cos x} = 0 \to \sin x = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = k\pi \to x = \pi, 2\pi$$ ۲ جواب

$$3\tan^2 x - 1 = 0 \Rightarrow \tan^2 x = \frac{1}{3} \Rightarrow \tan x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} = \tan(\pm\frac{\pi}{6}) \xrightarrow{\tan x = \tan\alpha \to x = k\pi+\alpha} x = k\pi \pm \frac{\pi}{6} \to x = \frac{\pi}{6}, \pi+\frac{\pi}{6}, \pi-\frac{\pi}{6}, 2\pi-\frac{\pi}{6}, 2\pi+\frac{\pi}{6}$$ ۵ جواب

در کل معادله در بازهٔ $(0, \frac{5\pi}{2})$ دارای ۷ جواب است.

۱۰

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq |\cos x| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -|\cos x| \leq 0 \Rightarrow -1-1 \leq -|\cos x| - 1 \leq 0 - 1$$

$$\Rightarrow -2 \leq y \leq -1 \Rightarrow \text{برد تابع} = [-2, -1] \Rightarrow a = -2, b = -1 \Rightarrow b - a = -1 - (-2) = 1$$

جمع بارم : ۲۰ نمره	نام و نام خانوادگی مصحح : شهروز رحیمی	امضاء: