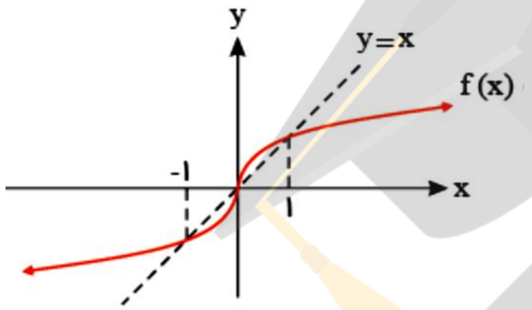
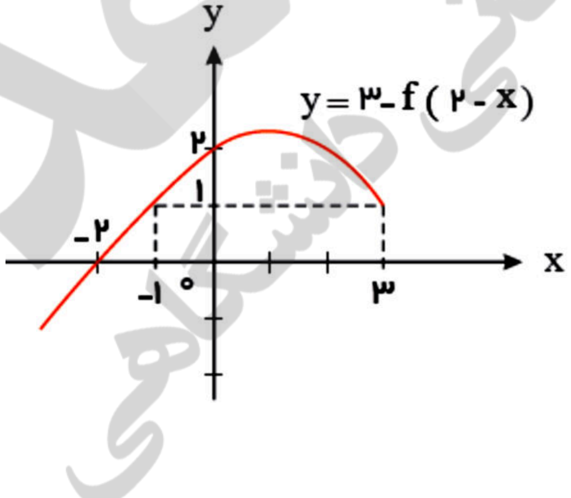
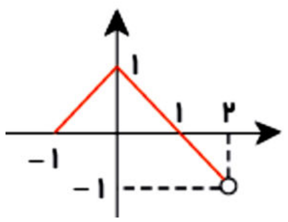
نام درس: حسابان ۲
نام دبیر: شهروز رحیمی
ساعت امتحان: ۰۸:۰۰ صبح/ عصر
مدت امتحان : ۹۰ دقیقه

جمهوری اسلامی ایران
اداره ی کل آموزش و پرورش شهر تهران
اداره ی آموزش و پرورش شهر تهران منطقه ۱۲ تهران
دبیرستان غیردولتی پسرانه سرای دانش واحد حافظ
آزمون **پایان** ترم **نوبت اول** سال تحصیلی ۹۹- ۱۳۹۸

نام و نام خانوادگی: ....
مقطع و رشته: دوازدهم تجربی
نام پدر: ....
شماره داوطلب: ....
تعداد صفحه سؤال: ۲

نمره به عدد:	**نمره به حروف:**	**نمره تجدید نظر به عدد:**	**نمره به حروف:**	**محل مهر و امضاء مدیر**
نام دبیر:	**تاریخ و امضاء:**	**نام دبیر:**	**تاریخ و امضاء:**	

ردیف	سؤالات	بارم
۱	اگر چند جمله ای $p(x)=x^3-ax^2+bx+1$ برچند جمله ای های $x-2$ و $x+1$ بخش پذیر باشد باقیمانده تقسیم $p(x)$ بر $2x-1$ کدام است؟	۱/۵
۲	نمودار f مطابق شکل زیر است ، دامنه تابع $y=\sqrt{\frac{f(x)-f(x)^{-1}}{x^2-1}}$ کدام است؟ 	۲
۳	اگر $f(x)=x^2-\sqrt{3x}$ و $g=\{(-2,0),(0,3),(1,-1),(3,-2)\}$ باشند، $f(g^{-1}(-2))$ کدام است؟	۲
۴	حدود m چقدر باشد تا $f=\{(5,3),(3,m^2-m),(-4,2),(4,m^2-m)\}$ یک تابع صعودی باشد.	۱/۵
۵	با توجه به نمودار $y=3-f(2-x)$ ، نمودار تابع $y=2-f(x+3)$ کدام است؟ 	۲
۶	اگر $f\left(\frac{-x}{x+1}\right)=\frac{1}{x+1}$ باشد، آنگاه $f(x)$کدام است؟ $(x\neq 1)$	۲
۷	اگر نمودار تابع $f(x)$ بصورت مقابل باشد نمودار $fof(x)$ را رسم کنید. 	۲

۸	بازای چند مقدار a دو تابع زیر دوره تناوب یکسان دارند. $y_1=-2\sin((a^2+2)x)+3$ و $y_2=-3\cos 3ax-2$	۱
۹	معادلات زیر رد بازه مورد نظرشان چند جواب دارند. $2\sin^2 x+3\cos x=3$ در بازهٔ $[-\pi,\pi]$ $\tan 2x=3\tan x$ در بازهٔ $(0,\frac{5\pi}{2})$	۴
۱۰	اگر برد تابع $y=-\|\cos x\|-1$ بصورت $[a$و$b]$ حاصل $b-a$ کدام است؟	۱

جمع بارم : ۲۰ نمره

اداره ی کل آموزش و پرورش شهر تهران

اداره ی آموزش و پرورش شهر تهران منطقه ۱۲ تهران

دبیرستان غیر دولتی پسرانه سرای دانش واحد حافظ

کلید سؤالات پایان ترم نوبت اول سال تحصیلی ۹۹-۹۸

نام درس: حسابان ۲

نام دبیر: شهروز رحیمی

ساعت امتحان: ۸:۳۰ صبح/ عصر

مدت امتحان: ۹۰ دقیقه

ردیف	راهنمای تصحیح	محل مهر یا امضاء مدیر

۱

چون $p(x)=x^۳-ax^۲+bx+۱$ بر $x-۲$ و $x+۱$ بخش پذیر است، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} p(۲)=۰\Rightarrow ۸-۴a+۲b+۱=۰\Rightarrow ۴a-۲b=۹ \\ p(-۱)=۰\Rightarrow -۱-a-b+۱=۰\Rightarrow a+b=۰ \end{array}\right\}\rightarrow a=\frac{۳}{۲}, b=-\frac{۳}{۲}$$

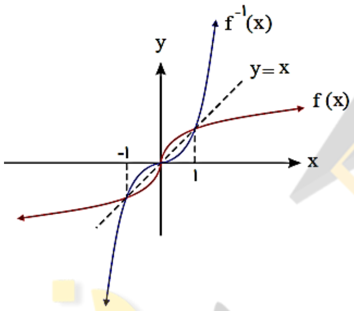
پس $p(x)=x^۳-\frac{۳}{۲}x^۲-\frac{۳}{۲}x+۱$ است.

$$۲x-۱=۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow p(\frac{۱}{۲})=\frac{۱}{۸}-\frac{۳}{۲}\times\frac{۱}{۴}-\frac{۳}{۲}\times\frac{۱}{۲}+۱=\frac{۱}{۸}-\frac{۳}{۸}-\frac{۳}{۴}+۱=۰$$

۲

ابتدا نمودار $f^{-۱}$ را رسم می‌کنیم و نمودار را در چهار بازهٔ زیر بررسی می‌کنیم:

می‌دانیم که زیر رادیکال همواره باید نامنفی باشد.



رابطه \ بازه	(-∞,-۱)	x=-۱	(-۱,۰)	x=۰	(۰,۱)	x=۱	(۱,+∞)
$f(x)-f^{-۱}(x)$	+	۰	−	۰	+	۰	−
$x^۲-۱$	+	۰	−		−	۰	+
$\frac{f(x)-f^{-۱}(x)}{x^۲-۱}$	+	تعریف نشده	+	۰	−	تعریف نشده	−

بنابراین دامنهٔ تابع $y=\sqrt{\frac{f(x)-f^{-۱}(x)}{x^۲-۱}}$ به‌صورت $(-\infty,۰]-\{-۱\}$ است.

۳

$$g=\{(-۲,۰),(۰,۳),(۱,-۱),(۳,-۲)\}\rightarrow g^{-۱}=\{(۰,-۲),(۳,۰),(-۱,۱),(-۲,۳)\}$$

پس: $(fog^{-۱})(-۲)=f(g^{-۱}(-۲))=f(۳)=۹-\sqrt{۹}=۹-۳=۶$

۴

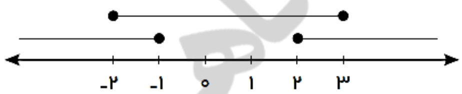
ابتدا xها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم.

$$f:\{(-۴,۲),(۳,m^۲-m),(۴,m^۲-m),(۵,۶)\}$$

می‌دانیم در تابع صعودی اگر $x_۱<x_۲$ باشد آن‌گاه $f(x_۱)\le f(x_۲)$ است پس:

$$۲\le m^۲-m\le ۶\rightarrow\begin{cases} m^۲-m\ge ۲\rightarrow m^۲-m-۲\ge ۰\rightarrow (m-۲)(m+۱)\ge ۰ \\ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} m\le -۱ \text{ یا } m\ge ۲ \quad (I) \\ m^۲-m\le ۶\rightarrow m^۲-m-۶\le ۰\rightarrow (m-۳)(m+۲)\le ۰ \\ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -۲\le m\le ۳ \quad (II) \end{cases}$$

از اشتراک جواب‌های (I) و (II) داریم:



$$\rightarrow m\in[-۲,۳]-(-۱,۲)$$

۵

$$y=۳-f(۲-x)\xrightarrow[\text{قرینه نسبت به y ها}]{x\to -x} y=۳-f(۲+x)\xrightarrow[\text{۱ واحد انتقال به چپ}]{x\to x+۱} y=۳-f(۲+x+۱)$$

$$\Rightarrow y=۳-f(x+۳)\xrightarrow{\text{یک واحد انتقال به پایین}} y=۲-f(x+۳)$$

۶

عبارت را ساده‌تر می‌کنیم تا دو طرف تساوی جملات مشابه داشته باشند بنابراین:

$$f\left(\frac{-x}{x+۱}\right)=f\left(\frac{-x-۱+۱}{x+۱}\right)=f\left(-۱+\frac{۱}{x+۱}\right)$$

با فرض $\frac{۱}{x+۱}=t$ و $x\neq -۱$ خواهیم داشت:

$$f(-۱+t)=t\xrightarrow{t=u+۱} f(u)=u+۱\Rightarrow f(x)=x+۱$$

۷

با توجه به شکل داریم:

$D_f=[-1,2)\ ,\ \ R_f=(-1,1]$

$D_{fof}=x\in D_f; f\in[-1,2)\to D_{fof}=[-1,2)$

با توجه به نمودار تابع وقتی $-1\le x<2$ است مقدار fof در بازه‌ی $[0,1]$ تغییر می‌کند بنابراین برد تابع fof بازه‌ی $[0,1]$ می‌باشد.

۸

$$y_1=-2\sin((a^2+2)x)+3 : T_1=\frac{2\pi}{|a^2+2|}$$

$$y_2=-3\cos 3ax-2 : T_2=\frac{2\pi}{|3a|}$$

$$\xrightarrow{T_1=T_2}|a^2+2|=|3a|\Rightarrow\begin{cases}a^2+2=3a\Rightarrow a^2-3a+2=0\\ a^2+2=-3a\Rightarrow a^2+3a+2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(a-1)(a-2)=0\\(a+1)(a+2)=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow a=-1,1,-2,2$$

۹

$$2\sin^2x+3\cos x=3\Rightarrow 2\sin^2x+3\cos x-3=0\Rightarrow 2(1-\cos^2x)+3\cos x-3=0$$

$$\Rightarrow 2-2\cos^2x+3\cos x-3=0\Rightarrow 2\cos^2x-3\cos x+1=0\xrightarrow{a+b+c=0}\begin{cases}\cos x=1\xrightarrow{\text{حالت خاص}}x=2k\pi\\ \cos x=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}\to x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}\end{cases}$$

جواب‌های واقع در بازهٔ $[-\pi,\pi]$ عبارت‌اند از: $-\frac{\pi}{3}\ ,\ 0\ ,\ \frac{\pi}{3}$

می‌دانیم $\tan 2a=\frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$ است.

$\tan 2x=3\tan x\ \to\frac{2\tan x}{1-\tan^2x}=3\tan x\ \to 2\tan x=3\tan x(1-\tan^2x)\ \to 2\tan x=3\tan x-3\tan^3x\ \to 3\tan^3x-\tan x=0\ \to\tan x(3\tan^2x-1)=0\ \to\tan x=0$ یا $3\tan^2x-1=0$

$\tan x=0\ \to\frac{\sin x}{\cos x}=0\ \to\sin x=0\ \xrightarrow{\text{حالت خاص}}x=k\pi\ \to x=\pi,2\pi$ ۲ جواب

$3\tan^2x-1=0\ \Rightarrow\tan^2x=\frac{1}{3}\ \Rightarrow\tan x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}=\tan(\pm\frac{\pi}{6})\ \xrightarrow{\tan x=\tan\alpha\to x=k\pi+\alpha}x=k\pi\pm\frac{\pi}{6}\ \to x=\frac{\pi}{6},\pi+\frac{\pi}{6},\pi-\frac{\pi}{6},2\pi-\frac{\pi}{6},2\pi+\frac{\pi}{6}$ ۵ جواب

در کل معادله در بازهٔ $(0,\frac{5\pi}{2})$ دارای ۷ جواب است.

۱۰

$$-1\le\cos x\le1\Rightarrow0\le|\cos x|\le1\Rightarrow-1\le-|\cos x|\le0\Rightarrow-1-1\le-|\cos x|-1\le0-1$$

$\Rightarrow -2\le y\le-1\Rightarrow$ برد تابع $=[-2,-1]\Rightarrow a=-2,b=-1\Rightarrow b-a=-1-(-2)=1$

جمع بارم : ۲۰ نمره	نام و نام خانوادگی مصحح : شهروز رحیمی	امضاء: