

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

هندسه (۱)

رشتهٔ ریاضی و فیزیک

کتاب معلم
(راهنمای تدریس)

پایهٔ دهم
دورهٔ دوم متوسطه

۱۳۹۵



وزارت آموزش و پرورش سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

نام کتاب:	کتاب معلم هندسه پایه دهم دوره دوم متوسطه - ۱۱۰۳۶۵
پدیدآورنده:	سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
مدیریت برنامه‌ریزی درسی و تألیف:	دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری
شناسه افزوده برنامه‌ریزی و تألیف:	میلاد افشین منش، طاهره اسدی، زهرا رحیمی، محمدرضا سیدصالحی، هوشنگ شرقی، اسماعیل طاهری مقدم، مرتضی علیشاهی و محمود نصیری (اعضای گروه تألیف)
مدیریت آماده‌سازی هنری:	اداره کل نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی
شناسه افزوده آماده‌سازی:	لیدا نیک‌روش (مدیر امور فنی و چاپ) - جواد صفری (مدیر هنری) - زهره بهشتی شیرازی (صفحه‌آرا) - مریم دهقان‌زاده (رسم) - فاطمه باقری‌مه‌ر، علیرضا کاهه، علیرضا ملکان، سپیده ملک‌ایزدی، حمید ثابت کلاچاهی و احمدرضا امینی (امور آماده‌سازی)
نشانی سازمان:	تهران: خیابان ایرانشهر شمالی - ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی) تلفن: ۸۸۸۳۱۱۶۱-۹، دورنگار: ۸۸۳۰۹۲۶۶، کد پستی: ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹ وبگاه: www.irtextbook.ir و www.chap.sch.ir
ناشر:	شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران تهران - کیلومتر ۱۷ جاده مخصوص کرج - خیابان ۶۱ (داروپخش) تلفن: ۴۴۹۸۵۱۶۱-۵، دورنگار: ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی: ۳۷۵۱۵-۱۳۹
چاپخانه:	شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»
سال انتشار و نوبت چاپ:	چاپ اول ۱۳۹۵

شایک ۹۷۸-۹۶۴-۰۵-۲۶۶۹-۹

ISBN: 978-964-05-2669-9



جوان‌ها قدر جوانیشان را
بدانند و آن را در علم و
تقوا و سازندگی خودشان
صرف کنند که اشخاصی
امین و صالح بشوند.
مملکت ما با اشخاص امین
می‌تواند مستقل باشد.

امام خمینی
«قدس سره الشریف»

کلیه حقوق مادی و معنوی این کتاب متعلق به سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش است و هرگونه استفاده از کتاب و اجزای آن به صورت چاپی و الکترونیکی و ارائه در پایگاه‌های مجازی، نمایش، اقتباس، تلخیص، تبدیل، ترجمه، عکس برداری، نقاشی، تهیه فیلم و تکثیر به هر شکل و نوع، بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می‌گیرند.

نیز

سامانه اخبار و اطلاع رسانی دانشگاهی

فهرست

فصل ۱: ترسیم هندسی و استدلال ۱

درس اول: ترسیم‌های هندسی ۴

درس دوم: استدلال ۹

فصل ۲: قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن ۱۵

درس اول: نسبت و تناسب در هندسه ۲۲

درس دوم: قضیه تالس ۲۵

درس سوم: تشابه مثلث‌ها ۲۸

درس چهارم: کاربردهایی از قضیه تالس و تشابه مثلث‌ها ۳۵

فصل ۳: چندضلعی‌ها ۴۳

درس اول: چندضلعی‌ها و ویژگی‌هایی از آنها ۵۲

درس دوم: مساحت و کاربردهای آن ۵۷

فصل ۴: تجسم فضایی ۷۵

درس اول: خط، نقطه و صفحه ۸۲

درس دوم: تفکر تجسمی ۸۴

مقدمه

هندسه به عنوان یک مهارت پایه‌ای ریاضی، در برنامه درسی ریاضی بسیاری از کشورها، مورد تأیید و توجه قرار گرفته و تفکر هندسی و آموزش هندسه، در برنامه درسی ریاضی مدرسه‌ای از جایگاه ویژه‌ای برخوردار است. از همین رو در تألیف کتاب درسی سعی بر آن بوده است که نخست حوزه هندسه و اندازه‌گیری و چگونگی آموزش آن، مورد بازاندیشی قرار گیرد و سپس محتوای کتاب با تکیه بر آخرین دستاوردهای پژوهشی در این حوزه و با تبعیت از اسناد بالادستی از جمله سند برنامه درسی ملی، تنظیم و پیشنهاد شود.

بدین ترتیب برخی اصول و رویکردهای کلی، هدایتگر مؤلفین این کتاب بوده است. از جمله اینکه در تنظیم و تدوین محتوای کتاب، متوسط هوش و توان یادگیری دانش‌آموزان مد نظر می‌باشد. روند آموزش در این کتاب به آرامی از شهود آغاز شده و به سمت تجرید پیش می‌رود و مشابه با سایر کتاب‌های درسی جدیدالتألیف، با اخذ توجه بیشتر به فعالیت دانش‌آموزان، سعی بر آن است که شیوه آموزش از معلم محوری فاصله گرفته و طالب مشارکت بین معلم و دانش‌آموزان باشد. نگاه کاربردی و برقراری ارتباط هندسه با زندگی روزمره، رویکرد دیگری است که در تدوین کتاب مورد توجه قرار گرفته و تلاش شده که تلفیقی از هندسه با سایر حوزه‌های مطالعاتی نظیر معماری، هنر و زیبایی‌شناسی ارائه شود.

در این کتاب تلاش شده است با زمینه‌سازی برای آشنایی دانش‌آموزان با انواع استدلال و تقویت توانمندی تشخیص اثبات‌های معتبر از اثبات‌های نامعتبر — همسو با آرمان‌های سند برنامه درسی ملی — بستر لازم برای تربیت و پرورش انسان‌هایی که در برخورد با مسائل می‌توانند به طور منطقی استدلال کنند و قدرت تجزیه و انتزاع بیشتری دارند، فراهم شود.

همچنین سعی بر آن بوده است که بر تقویت و توسعه روحیه پرسشگری، پژوهشگری و خلاقیت در دانش‌آموز تأکید شود. بدین ترتیب با زمینه‌سازی برای

ایجاد نظم فکری با توجه به سلسله مراتب اصول و قضایا و تشخیص روابط منطقی بین مفاهیم و زمینه‌سازی برای دستیابی به علم نسبت به پدیده‌ها، روابط، رویدادها و قوانین جهان آفرینش، به دانش‌آموز کمک می‌شود که به درک قانونمندی‌های طبیعت نائل آید.

بیان دقیق ایده‌های هندسی با به‌کارگیری زبان هندسی و تقویت گفتمان ریاضی، پرورش ذهن خلاق و بالا بردن درک فضایی دانش‌آموزان، شناسایی و تحلیل ویژگی‌ها و مشخصه‌های اشکال هندسی در صفحه و فضا اهداف دیگری است که در راستای تقویت تفکر تجسمی — که مورد تأکید برنامه درسی ملی است — هدایتگر تنظیم محتوای این کتاب بوده است. بدین ترتیب در این قسمت سعی شده است که بدون ورود به حیطه محاسبات و استدلال و تنها به کمک درک شهودی، دانش‌آموزان با مهم‌ترین سازه‌های ساختمان هندسه آشنا شده و به زبان تصاویر و اشکال هندسی گفت و گو خواهد کردند.



فصل ۱

ترسیم هندسی و استدلال

نیز

سامانه آریار و اطلاع رسانی دانشگاهی

تصویر عنوانی

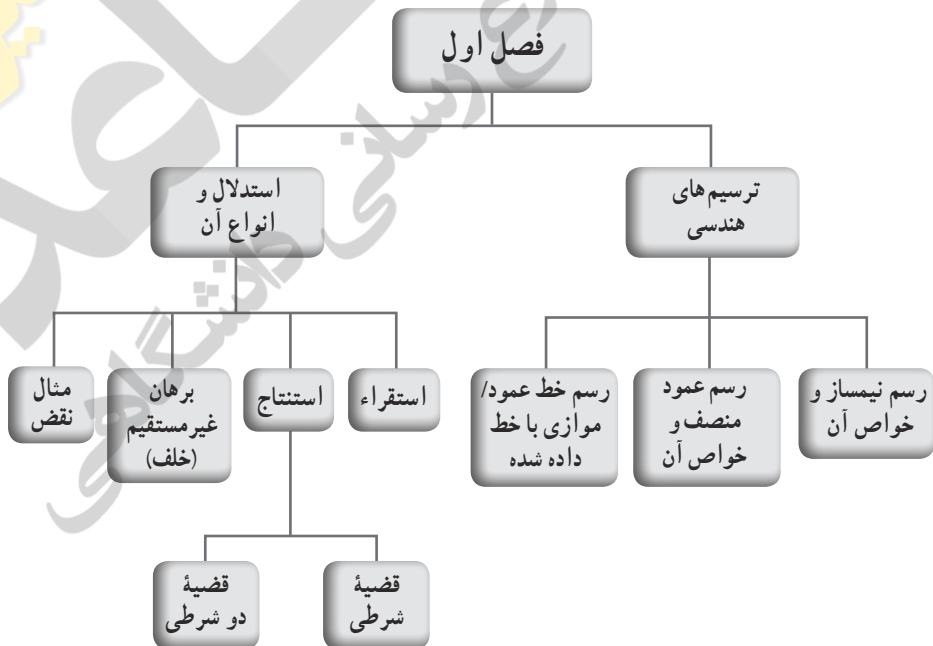
مسئله تقسیم‌بندی زمین‌های قابل زراعت برای مصارف کشاورزی و گذران زندگی، قدمتی به طول تاریخ بشری دارد.

برخی بر این باورند که شکل‌گیری هندسه به‌طور رسمی به زمانی برمی‌گردد که بر اثر طغیان رود نیل در مصر مرز میان زمین‌های کشاورزی شسته شده و از بین می‌رفت و بازسازی و تقسیم‌بندی مجدد زمین‌ها، مسئله‌ای مناقشه‌برانگیز میان کشاورزان بود.

واژه «هندسه» یا معادل آن «Geometry» که از ترکیب $\text{Geo} + \text{metry}$ به معنای اندازه‌گیری زمین به وجود آمده است، اشاره به این پیدایش تاریخی دارد.

لذا شاید بی‌مناسبت نباشد اگر هندسه دهم با ترسیم‌های هندسی آغاز شده و با روند تاریخی شکل‌گیری این علم، ارتباطی تنگاتنگ یابد.

نقشه مفهومی



نگاه کلی به فصل

ترسیم‌های هندسی بر پایه مفهوم «مکان هندسی» بنا شده است و منظور از آن مجموعه تمام نقاطی از صفحه است که دارای ویژگی مشخصی باشند و هر نقطه از صفحه که دارای آن ویژگی است در مجموعه فوق قرار داشته باشد.

در بخش اول این فصل، بر پایه مفهوم مکان هندسی مجموعه تمام نقاطی که از یک یا دو نقطه و یا یک خط دارای فاصله یکسانی باشند، تعریف شده و این تعاریف، پله نخستین در تعریف نیمساز یک زاویه و عمود منصف یک پاره خط و همچنین عکس خاصیت نیمساز و عمود منصف قرار گرفته است.

شروع گام به گام پیشروی با حوصله کتاب درسی در این بخش، زمینه را برای آموزش رسم خط عمود بر یک خط و خط موازی با یک خط فراهم کرده است و با ایجاد فعالیت‌هایی مرحله‌بندی شده مقدمات کشف ویژگی‌های چهارضلعی‌های معروف را توسط دانش‌آموزان در این فصل و ادامه آن در فصل سوم به وجود آورده است.

از آنجا که پرداختن به اثبات بدون داشتن درک درستی از روش‌های پذیرفته شده استدلال در ریاضیات و هندسه؛ آموزشی عقیم و نیمه‌کاره است، در بخش دوم این فصل، کتاب درسی با شیب ملایمی به آشناسازی دانش‌آموزان با انواع استدلال و برهان در ریاضی پرداخته و با معرفی مثال نقض به عنوان ابطال‌کننده یک اثبات، پایه‌ای برای آموزش استدلال‌ها در هر کجای هندسه یا ریاضی فراهم آورده است.

ترسیم‌های هندسی

درس اول

اهداف درس اول

- ۱ آشنایی با روش یافتن مجموعه نقاطی که از یک یا دو نقطه به فاصله مشخصی باشند.
- ۲ آشنایی با نیمساز یک زاویه به عنوان مجموعه نقاطی که از دو ضلع زاویه به فاصله یکسانی هستند.
- ۳ مهارت در رسم نیمساز یک زاویه داده شده و درک عکس خاصیت نیمساز
- ۴ آشنایی با عمود منصف یک پاره خط به عنوان مجموعه نقاطی که از دو سر پاره خط به فاصله یکسانی است.
- ۵ مهارت در رسم عمود منصف یک پاره خط دلخواه و و درک عکس خاصیت عمود منصف
- ۶ روش رسم خطی عمود بر یک خط در نقطه‌ای روی خط یا بیرون خط و تسلط بر آن
- ۷ روش رسم خطی موازی با یک خط از نقطه‌ای خارج آن خط و تسلط بر آن
- ۸ مهارت در رسم چندضلعی‌ها و یافتن مرکز دایره با داشتن کمانی از دایره

روش تدریس درس اول

پیش از شروع درس مطمئن شوید که تمام دانش آموزان ابزار پرگار و خط کش به همراه داشته باشند تا از کاسته شدن سرعت تدریس جلوگیری شود.

فعالیت صفحه ۱۰ در سؤال ۱ دایره را به عنوان مجموعه تمام نقاطی که از مرکز دایره به فاصله ثابتی هستند، معرفی می‌کند. برای عمق بخشی بیشتر می‌توانید مربعی به مرکز O رسم کنید و این سؤال را مطرح کنید که «چرا پاسخ سؤال ۱ این فعالیت، نمی‌تواند این مربع باشد؟»

سؤال ۲ پیش زمینه‌ای برای آموزش رسم عمود منصف در ادامه این بخش خواهد بود.

سؤال ۳ دو نقطه روی خط d باید به دست آید که این کار با کمان زدن انجام خواهد شد.

حل صحیح این سؤال لازمه اجرای روش رسم خطی عمود بر یک خط از نقطه‌ای بیرون آن خط است.

مقایسه سؤال ۴ با ۲ توسط دانش آموزان می تواند نتیجه ای مفید به همراه داشته باشد. چرا که حاصل انجام هر دو سؤال این فعالیت، خطی عمود بر پاره خط AB است. اما این خط عمود در سؤال ۲، از هر دو طرف پاره خط به فاصله یکسان و در سؤال ۴ به یک طرف پاره خط نزدیک تر است. ادامه پاسخ گویی به سؤال ۴، پیش زمینه روش رسم مثلثی با داشتن اندازه ۳ ضلع است.

کار در کلاس صفحه ۱۱، مروری بر سؤالات مطرح شده در فعالیت صفحه ۱۰ را دارد. در انجام سؤال ۳ که یک مسئله باز پاسخ (چند جوابی) است، می توانید از سطح عددگذاری ساده فراتر رفته و از دانش آموزان بخواهید مسئله را به طور جبری و با قرار دادن شرط های مناسب برای عبارات جبری، پاسخ دهند. انجام فعالیت پایین صفحه ۱۱، به درک نتیجه «خاصیت نیمساز» می رسد و ادامه این فعالیت در صفحه ۱۲ «عکس خاصیت نیمساز» را آموزش می دهد. نتیجه دومی که در صفحه ۱۲ قرار دارد، ترکیب خاصیت و عکس خاصیت نیمساز در صورت یک قضیه دو شرطی است. بکوشید این نتیجه با جمله بندی صحیح خود دانش آموزان تکمیل شود.

فعالیت پایین صفحه ۱۲ روش رسم نیمساز را آموزش می دهد. می توانید بعد از انجام مرحله به مرحله این فعالیت از یک یا چند دانش آموز بخواهید تا روش رسم نیمساز یک زاویه را به طور کلی برای کل کلاس توضیح دهند و جمع بندی کنند. برای توسعه این فعالیت می توانید از دانش آموزان بخواهید تا دهانه پرگار را به قدری باز کنند که کمان های رسم شده با مرکز A و B ، یکدیگر را پشت زاویه O قطع کنند و سپس از رأس زاویه و نقطه به وجود آمده خطی بگذرانند و بررسی کنند که آیا باز هم نیمساز زاویه O خواهد بود یا نه و دلایلش را ذکر کنند.

در انجام فعالیت صفحه ۱۳ سؤال ۱ خاصیت عمود منصف را آموزش می دهد. می توانید قبل از استدلال رسمی، از دانش آموزان بخواهید نقطه W را روی عمود منصف بالا و پایین ببرند و با خط کش فاصله آن تا دو سر A و B را اندازه بگیرند.

سؤال ۲ این فعالیت، عکس خاصیت عمود منصف را بیان خواهد کرد و نتیجه ۲ آن را در قالب یک جمله شسته رفته ارائه می دهد.

نتیجه ای که بعد از این دو نتیجه آمده ترکیب خاصیت عمود منصف و عکس خاصیت عمود منصف در قالب یک قضیه دو شرطی است.

فعالیت پایین صفحه ۱۳ با رسیدن به این نتیجه که برای مشخص کردن یک خط داشتن ۲ نقطه از آن لازم است، ضرورت داشتن دو نقطه برای رسم عمود منصف یک پاره خط را در فعالیت صفحه ۱۴ فراهم می کند.

فعالیت بالای صفحه ۱۴ روش رسم عمود منصف پاره خط AB را بیان می کند. بهتر است کار در کلاسی که بعد از آن آمده است را ابتدا دانش آموزان به صورت تک نفری یا در گروه های ۳-۴ نفره پاسخ

دهند و سپس از هر گروه یک نماینده، نظر گروه را بیان کرده و در نهایت شما با کمک دانش‌آموزان بر روی نظر کامل‌تر و صحیح‌تر توافق کنید.

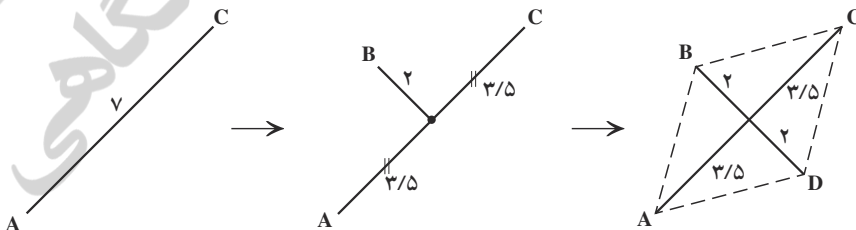
کار در کلاس انتهای این صفحه می‌تواند مشابه کار در کلاس قبلی اجرا و حل شود. در فعالیت بالای صفحه ۱۵، برای پاسخ‌گویی به سؤال ۱ می‌توانید نگاهی به سؤال ۳ فعالیت صفحه ۱۰ داشته باشید و یادآوری صورت گیرد.

اجرای دقیق مراحل رسم کمان‌ها، لازمه پاسخ‌گویی صحیح به این فعالیت است. کار در کلاس پس از آن، می‌تواند در قالب یک کار گروهی یا انفرادی انجام شود و پس از آن توافق کلی صورت پذیرد. فعالیت وسط صفحه ۱۵، با هدف آموزش رسم خطی موازی با خط d طراحی شده است و روش آن، استفاده از دو عمود متوالی می‌باشد. با توجه به وقت‌گیر بودن این فعالیت، زمان مناسب برای اجرای آن در کلاس را در نظر داشته باشید. کار در کلاس پس از آن می‌تواند با توجه به آنکه دانش‌آموزان روش رسم خطی عمود بر یک خط از نقطه‌ای داده شده روی آن را قبلاً یاد گرفته‌اند به صورت خلاصه‌تر و با پرهیز از بیان جزئیات، حل شود.

فعالیت پایین صفحه ۱۵ که در صفحه ۱۶ نیز ادامه می‌یابد، ترکیبی از مهارت‌های آموخته شده توسط دانش‌آموزان در این فصل را به کار می‌گیرد تا روش رسم مربعی با قطر داده شده را آموزش دهد. کار در کلاس انتهای این فصل، با حل گروهی یا انفرادی در کلاس قابل انجام است.

حل تمرین‌های صفحه ۱۶

۱ ابتدا پاره خط AC به طول 7cm را رسم می‌کنیم. سپس از وسط AC و در راستایی غیر از راستای AC ، به اندازه 2cm پاره خطی رسم می‌کنیم تا نقطه B به دست آید. پاره خط رسم شده را از سمت دیگر به اندازه 2cm امتداد می‌دهیم تا نقطه D به دست آید و شکل کامل شود.



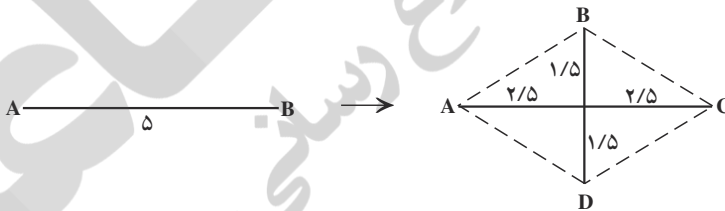
۲ متوازی الاضلاع است. زیرا رأس D روی کمانی به مرکز A و شعاع a واقع شده است. پس $AD=a$ و رأس C روی کمانی به مرکز B و شعاع a واقع شده است. پس $BC=a$ همچنین رأس D روی کمانی به مرکز B واقع شده است. پس $BD=b$ و رأس C روی کمانی به مرکز A و شعاع b واقع شده است پس $AC=b$ و چون $AD=BC=a$ و $AC=BD=b$ یعنی اضلاع روبه‌رو دو به دو مساوی‌اند. بنابراین داریم:

$$\left. \begin{array}{l} BD = AC = b \\ AD = BC = a \\ \text{مشترک } AB = AB \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABD \cong \triangle ABC$$

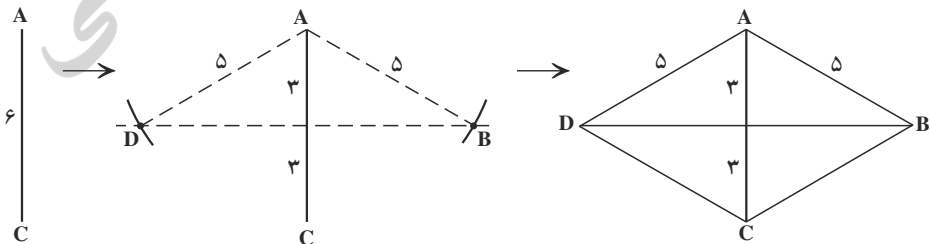
$\hat{B}_1 = \hat{A}_1$ تساوی اجزای متناظر

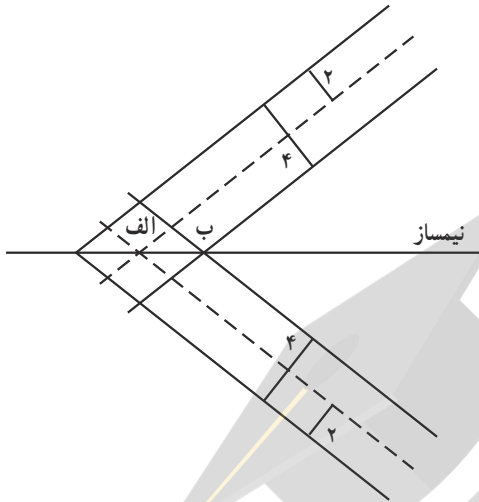
چون $\hat{B}_1 = \hat{A}_1$ ، طبق عکس قضیه خطوط موازی و مورب $BD \parallel AC$ و به‌طور مشابه می‌توان نشان داد که $AD \parallel BC$. پس شکل متوازی الاضلاع است.

۲ الف) پاره خط AC به طول ۵cm را رسم می‌کنیم و از وسط AC و عمود بر آن، به اندازه ۱/۵ در دو طرف امتداد می‌دهیم تا نقاط B، D به دست آمده و شکل کامل شود.



ب) ابتدا پاره خط AC به طول ۶cm را رسم می‌کنیم. بر وسط AC خط دلخواهی، عمود می‌کنیم. عمود منصف AC را رسم می‌کنیم از نقطه A (یا C) به اندازه ۵cm کمان می‌زنیم تا عمود منصف AC را در دو نقطه B و D قطع کند و شکل کامل شود.





۶ الف) خطوطی به موازات دو ضلع زاویه و به فاصله 2 cm از آنها رسم می‌کنیم. محل تقاطع آنها پاسخ مسئله است.

ب) خطوطی به موازات دو ضلع زاویه و به فاصله 4 cm از آنها رسم می‌کنیم. محل تقاطع آنها پاسخ مسئله است.

پ) خطی از دو نقطه به دست آمده در قسمت الف) و ب) می‌گذرد. زاویه را نصف می‌کند.

۷ AB وتر دایره است. بنابراین A و B روی محیط دایره‌اند. پس فاصله آنها تا مرکز دایره یعنی OA و OB یکسان است. طبق عکس خاصیت عمود منصف، چون O از دو سر پاره خط AB به یک فاصله است، پس روی عمود منصف AB واقع شده است.

۸ دو وتر در قوس جلوی محوطه هجده قدم رسم می‌کند و عمود منصف آن دو وتر را ترسیم می‌نماید. محل برخورد دو عمود منصف، مرکز دایره و همان نقطه پتالی است.

استدلال

درس دوم

اهداف درس دوم

- ۱ درک اهمیت استدلال و آشنایی با برخی از انواع استدلال‌ها
- ۲ آشنایی با استدلال استقرایی (صرفاً به منظور حدسیه سازی)
- ۳ مهارت در استدلال استنتاجی با بررسی اثبات چندین قضیه هندسی شرطی و دوشروطی
- ۴ آشنایی با گزاره، نقیض گزاره، گزاره شرطی، قضیه‌های شرطی و دوشروطی، عکس قضیه
- ۵ مهارت در برهان غیرمستقیم (برهان خلف) و مثال نقض با بررسی چندین قضیه و مثال

روش تدریس درس دوم

پیش از ورود به تدریس، درباره اهمیت استدلال در زندگی و قضاوت عادلانه با دانش‌آموزان سخن بگویید و ریاضیات و هندسه را به عنوان علمی بنا شده بر پایه استدلال و منطق، به آنها معرفی کنید.

معرفی استدلال استقرایی در صفحه ۱۸ با یادآوری آموخته‌ها در سال‌های گذشته و مرور آنها، انجام شده است. از آنجا که استدلال استقرایی در علوم انسانی و تجربی (مانند پزشکی) کاربرد داشته و بهره‌گیری از آن در ریاضیات صرفاً به منظور حدسیه‌سازی می‌باشد. می‌توانید چندین مثال پذیرفته شده و صحیح را در کلاس مطرح کنید تا روند شکل‌گیری یک «حدس» در ریاضیات برای دانش‌آموزان آشکار شود. مثلاً:

— علی با اندازه‌گیری زوایای درونی مثلث و محاسبه مجموع آنها در 180° مثلث به این نتیجه (حدس) رسید که مجموع زوایای درونی هر مثلث (ممکن است) 180° باشد.

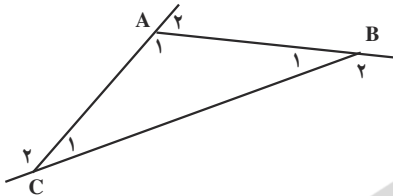
— مریم با یافتن نقطه هم‌رسی عمود منصف‌ها در 15° مثلث به این نتیجه (حدس) رسید که نقطه هم‌رسی عمود منصف‌ها (ممکن است) داخل، خارج یا روی مثلث واقع شود.

در ادامه صفحه ۱۸ معرفی استدلال استنتاجی انجام شده است.

به عنوان مثال بیشتر در استدلال استنتاجی نمادین می‌توانید از نمونه زیر استفاده کنید.

قضیه : مجموع زوایای خارجی هر مثلث 360° است.

اثبات :



$$\underbrace{\hat{A}_1 + \hat{A}_2}_{180^\circ} + \underbrace{\hat{B}_1 + \hat{B}_2}_{180^\circ} + \underbrace{\hat{C}_1 + \hat{C}_2}_{180^\circ} = 3 \times 180^\circ = 540^\circ$$

$$\underbrace{\hat{A}_1 + \hat{B}_1 + \hat{C}_1}_{180^\circ} + \underbrace{\hat{A}_2 + \hat{B}_2 + \hat{C}_2}_{?} = 540^\circ$$

مجموع زوایای درونی

$$\hat{A}_2 + \hat{B}_2 + \hat{C}_2 = 540^\circ - 180^\circ = 360^\circ$$

فعالیت صفحه ۱۹، شامل دو نوع استدلال برای اثبات یک قضیه است.

استدلال پژمان که با بررسی تعدادی چهارضلعی حکم کلی صادر کرده است، از نوع استقرایی و البته غیرقابل تعمیم برای هر چهارضلعی و لذا غیر قابل اعتماد است.

اما استدلال پیمان از نوع استنتاجی و قابل تعمیم برای هر چهارضلعی دلخواه است.

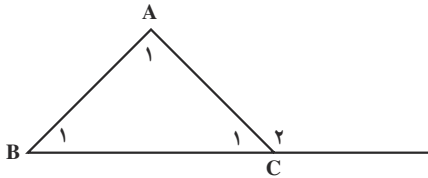
مثال پایین صفحه ۱۹ نیازمند درک کامل خاصیت عمود منصف و عکس خاصیت عمود منصف در درس اول همین فصل است. در این مثال، دانش‌آموزان با استدلال استنتاجی هم‌رسمی عمود منصف‌های اضلاع هر مثلث دلخواه را ثابت می‌کنند.

مثال وسط صفحه ۲۰، هم‌رسمی ارتفاع‌ها در هر مثلث دلخواه را با کمک تبدیل ارتفاع‌ها به عمود منصف اضلاع مثلث بزرگ‌تری که اضلاع آن دو برابر اضلاع مثلث اولیه است، ثابت می‌کند.

مثال پایین همین صفحه که ادامه آن در صفحه ۲۱ می‌باشد با استفاده از پیش‌دانسته‌های دانش‌آموزان در موضوع خاصیت نیمساز و عکس خاصیت نیمساز، هم‌رسمی نیمسازها در هر مثلث دلخواه را ثابت می‌کند. در هر سه مثال گفته شده، نتیجه به دست آمده برای سایر مباحث هندسی دارای اهمیت است. بکوشید این اهمیت را به دانش‌آموزان گوشزد کنید.

فعالیت صفحه ۲۱ همان‌طور که قبلاً اشاره شد استدلال استقرایی را به منظور حدسیه‌سازی به کار برده است و به طرح قضیه‌ای پرداخته که در غالب کتب غیررسمی هندسه به قضیه «ضلع برتر - زاویه برتر» معروف است. توجه داریم که عکس این قضیه نیز برقرار می‌باشد. دانش‌آموزان با جداسازی مفروضات و حکم قضیه از میان نوشتار مسئله، در صفحه ۲۲ به اثبات آن می‌پردازند.

دو پیش‌دانسته لازم برای اثبات این قضیه در صفحه ۲۲ آمده است. اولین پیش‌دانسته در مورد مثلث متساوی‌الساقین برای اکثر دانش‌آموزان بدیهی است. دومین پیش‌دانسته می‌تواند به صورت زیر اثبات و



یادآوری گردد :

$$C_2 = A_1 + B_1$$

و می دانیم اندازه زوایای A_1 و B_1 هر دو عددی مثبت است.

و می دانیم اگر از یک طرف تساوی عدد مثبتی را برداریم، آن طرف، کوچک تر از طرف دیگر خواهد شد، بنابراین :

$$C_2 = A_1 + B_1 \xrightarrow{A_1 > 0} C_2 > B_1$$

$$C_2 = A_1 + B_1 \xrightarrow{B_1 > 0} C_2 > A_1$$

و اثبات تمام است.

روند اثبات در صفحه ۲۲ به این پرسش ختم می شود که «چرا می توان این موضوع را درباره تمام مثلث هایی که دو ضلع نابرابر دارند، پذیرفت؟» پاسخ گویی به این پرسش نیازمند توجه دادن دانش آموزان به جمله ای است که در صفحه قبل، پیش از آغاز استدلال نمادین آورده شده است : «مثلثی می کشیم که دو ضلع نابرابر داشته باشد و ویژگی خاص دیگری نداشته باشد.»

توجه به این نکته که در استدلال های استنتاجی، اشکال هندسی صرفاً ویژگی بیان شده در مسئله را داشته و غیر از آن ویژگی اضافی دیگری بر آنها تحمیل نشده باشد، جان مایه قابلیت تعمیم یافتن استدلال های استنتاجی می باشد.

ذیل همین اثبات کلمه «قضیه» برای اولین بار مطرح می شود. بکوشید استفاده مکرر از این واژه، آن را برای دانش آموزان کلاس، مانوس کند.

پاراگراف انتهای صفحه ۲۲ روند شکل گیری یک استدلال ریاضی را بیان می کند و الگوریتم مهمی برای سایر نمونه های بعدی می باشد.

صفحه ۲۳ با تعریف «عکس یک قضیه» و ارائه چند مثال، درس را ادامه می دهد.

صرف وقت در این موضوع برای رسیدن به تسلط حداکثری در کلاس حائز اهمیت است. لازم است دانش آموزان بتوانند فرض و حکم مسئله را یافته و با جابه جایی آنها، عکس قضیه را به وجود آورند. ضمناً عکس قضیه ۱ در صفحه ۲۵ با برهان غیرمستقیم اثبات خواهد شد. صفحه ۲۴ با معرفی گزاره به عنوان «صرفاً و فقط یک جمله خبری» آغاز می شود که می تواند خبری درست یا نادرست را بدهد. اگرچه تشخیص درستی یا نادرستی آن برای خواننده ممکن نباشد. مثلاً : «در مریخ موجود زنده وجود دارد.»

گزاره مرکب از ترکیب دو یا چند گزاره ساده به وجود می آید.

نفیض یک گزاره از نظر درستی یا نادرستی دقیقاً مخالف با گزاره اصلی است. درنگ لازم در این قسمت برای کسب مهارت کافی، الزامی است. نمونه مناسبی که می توانید برای تفهیم بیشتر به کار ببرید

گزاره زیر است :

$$a \leq 0 \Rightarrow a \neq 0 : \text{نقیض گزاره} \rightarrow a > 0 : \text{گزاره}$$

بعضی گزاره‌ها به جای آنکه خبری را به طور مستقیم بیان کنند آن را وابسته به یک شرط می‌کنند که گزاره‌های شرطی نام دارند. مثال‌های بیشتر برای گزاره شرطی (که ممکن است درست یا نادرست باشند) در زیر آمده است.

$$\square \text{ اگر } a > 0 \text{ آنگاه } 2a > 0 \text{ (درست)}$$

$$\square \text{ اگر } a < b \text{ آنگاه } a^2 < b^2 \text{ (نادرست)}$$

$$\square \text{ اگر } a < 0 \text{ آنگاه } a+1 < 1 \text{ (درست)}$$

استدلال غیر مستقیم یا برهان خلف، نوعی از استدلال است که با فرض نادرست بودن حکم آغاز می‌شود و به تناقض با یکی از فرض‌های مسئله یا حقایق دانسته شده ریاضی می‌رسد. دانش‌آموزان در سال‌های آینده به این نوع استدلال، نیاز خواهند داشت. مثال‌هایی که در این قسمت مطرح شده است هر دو مورد تناقض را پوشش داده است. مثال اول به تناقض با این حقیقت که «مجموع زوایای درونی هر مثلث 180° است» می‌رسد و مثال دوم به تناقض با یکی از مفروضات قضیه می‌رسد.

پیشنهاد می‌شود بعد از پایان اثبات قضیه ۱، دانش‌آموزان برای یک بار هم که شده قضیه ۱ و عکس قضیه ۱ و اثبات آنها را در کنار هم دیده و مرور کنند.

صفحه ۲۶ را می‌توان جمع‌بندی یک قضیه شرطی و عکس آن، در قالب «قضیه دو شرطی» دانست. قضیه‌های دو شرطی با نماد « $\Leftrightarrow$ » نوشته شده و اصطلاح‌های «اگر و تنها اگر» یا «اگر و فقط اگر» برای بیان کلامی آن استفاده می‌شود.

نمونه‌هایی از قضایای دوشروطی به صورت زیر است :

$$\square a > b \Leftrightarrow a+2 > b+2$$

$$\square a > 0 \Leftrightarrow a^2 > 0$$

$$\square a < b \Leftrightarrow -b < -a$$

مثال گفته شده در پایان این قسمت را می‌توانید از طریق برابری مساحت مثلث در هر دو حالت اثبات کنید. برای این کار یک بار مساحت مثلث را از طریق نصف حاصل ضرب ارتفاع اولی در ضلع اولی بیابید و بار دیگر از طریق نصف حاصل ضرب ارتفاع دومی در ضلع دومی. با توجه به برابری مساحت در هر دو حالت و ایجاد یک تساوی بین دو رابطه، حکم نتیجه خواهد شد.

مثال نقض، مثالی است که یک حکم کلی را باطل می‌کند. گاهی اوقات مثال نقض نشان می‌دهد حدسیه‌ای که از طریق استدلال استقرایی به آن رسیده‌ایم نادرست و دارای نمونه‌ای است که در آن حدس کلی صدق نمی‌کند.

فصل اول: ترسیم هندسی و استدلال ۱۳

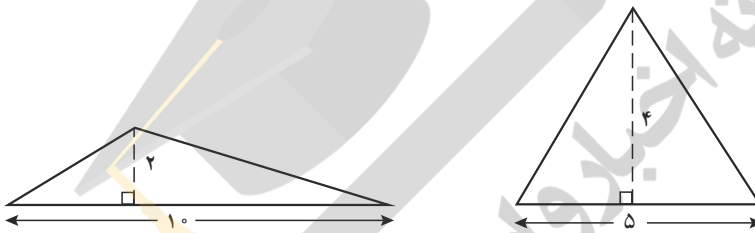
حتماً دانش آموزان را به این نکته توجه دهید که اگر برای یک حدس یا حکم کلی نتوانستیم مثال نقض بیاوریم دلیل بر درستی آن حدس نیست. ممکن است تلاش بیشتر، ما را به مثال نقض برساند. ضمن آنکه برای اثبات حکم کلی نیازمند استدلال استنتاجی هستیم.

کار در کلاس صفحه ۲۷ با ارائه چند مثال نقض قابل حل است.

سؤال ۱ بدیهی است. برای سؤال ۲، مورد (الف) می توانید دو مجموعه نامساوی را مثال بزنید؛ مثلاً

$$B = \{3, 4, 5\}, A = \{1, 2, 3\}$$

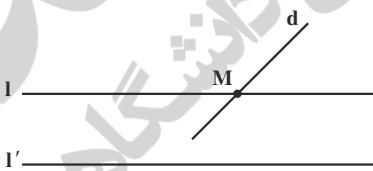
برای مورد (ب) می توانید مثلث های زیر را در نظر بگیرید :



در هر دو مثلث، مساحت برابر 10 می باشد اما واضح است که همنهشت نیستند.

حل تمرین های صفحه ۲۷

۱ فرض کنیم خط d و دو خط موازی l و l' را داریم، به طوری که خط d خط l را قطع کرده است.



می خواهیم ثابت کنیم خط d خط l' را نیز قطع می کند.

با برهان خلف، فرض می کنیم خط d خط l' را قطع

نکند. محل تقاطع خطوط d و l را M می نامیم. می بینیم

از نقطه M دو خط d و l عبور کرده اند که l' را قطع

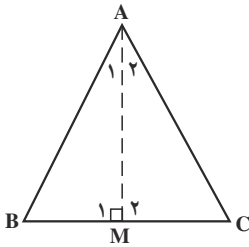
نکرده اند. یعنی هر دو خط d و l به موازات l' از نقطه

M رسم شده اند که این تناقض می باشد.

لذا فرض خلف باطل است و حکم ثابت است.

۲ فرض خلف را $\hat{B} = \hat{C}$ در نظر می گیریم. اگر نیمساز زاویه A را رسم کنیم $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ می باشد.

لذا در دو مثلث AMB و AMC خواهیم داشت :



$$\left. \begin{array}{l} A_1 + B + M_1 = 180^\circ \\ A_2 + C + M_2 = 180^\circ \\ A_1 = A_2 \\ B = C \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{M}_2$$

اکنون با دانستن اینکه $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ است داریم :

$$\left. \begin{array}{l} \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \\ AM : \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ \text{مشترک: } AM = AM \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ضضز}} \triangle AMB \cong \triangle AMC$$

$$\xrightarrow[\text{متناظر}]{\text{تساوی اجزاء}} AB = AC$$

که با فرض مسئله که $AB \neq AC$ در تناقض است و لذا فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

۳ الف) نادرست : مثلث قائم الزاویه با زوایای 90° و 70° و 20° را در نظر بگیرید.

ب) نادرست : در مثلث قائم الزاویه، از میان ۳ ارتفاع، دو تا از آنها با دو ضلع مثلث برابرند.

۴ هر n ضلعی را با رسم قطرهاش از یکی از رأس‌ها، می‌توان به $2-n$ مثلث تقسیم کرد. چون مجموع

زوایای درونی هر مثلث نیز 180° می‌باشد. مجموع زوایای درونی هر n ضلعی، $180^\circ \times (n-2)$ خواهد شد.

۵ الف) وجود دارد لوزی که مربع نیست.

ب) هر مستطیل یک مربع است.

پ) وجود دارد مثلثی که بیش از یک زاویه قائمه دارد.

ت) چهارضلعی محدبی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی اش 360° نیست.

۶ الف) در هر مثلث اگر دو زاویه برابر باشند، دو ضلع روبه‌رو به آنها نیز برابرند.

← در هر مثلث، دو زاویه با هم برابر است اگر و تنها اگر دو ضلع روبه‌رو به آنها با هم برابر باشند.

ب) اگر یک چهارضلعی، قطرهایش عمود منصف یکدیگر باشند، لوزی است.

← یک چهارضلعی لوزی است اگر و تنها اگر قطرهایش عمود منصف یکدیگر باشد.

پ) در هر مثلث اگر سه زاویه با هم برابر باشد، آنگاه سه ضلع نیز با هم برابرند.

← در هر مثلث، سه زاویه با هم برابرند اگر و تنها اگر سه ضلع با هم برابر باشند.

ت) اگر دو دایره مساحت‌های برابر داشته باشند، آنگاه شعاع‌های برابر نیز دارند.

← دو دایره، مساحت‌های برابر دارند اگر و تنها اگر شعاع‌های برابر داشته باشند.

فصل ۲

قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن

پیر

سامانه اطلاع رسانی دانشگاهی

توصیه‌های آموزشی

- در برخی از کتاب‌های هندسه یک پاره خط را به صورت $\overline{AB}$ و طول آن را به صورت $|AB|$ نمایش می‌دهند. ولی در کتاب هندسه ۱، هم خود پاره خط و هم طول آن (برای سادگی کار) به صورت AB نمایش داده می‌شوند. در صورت احساس نیاز، معلم می‌تواند اشاره کوتاهی به این موضوع در کلاس نماید.
- حتی الامکان از گچ یا ماژیک‌های رنگی برای ترسیم شکل‌ها استفاده شود.
- مطابق روندی که در کتاب هندسه پیش گرفته شده است، برای تعریف یک موضوع (مثلاً واسطه هندسی) یا بیان برخی از قضایا (مثلاً قضیه تالس یا تعمیم آن) توصیه می‌شود ابتدا طرحی از آن تعریف یا اثبات قضیه، به کمک مطالبی که در درس‌های قبلی فرا گرفته شده، بیان شود و سپس آن تعریف یا قضیه به طور رسمی بیان و اثبات شوند. این روش باعث می‌شود که دانش‌آموز آن تعریف یا قضیه را راحت‌تر بپذیرد و ابهت و سختی که ممکن است به واسطه اسم آن تعریف یا قضیه برای دانش‌آموز پیش بیاید، کم‌رنگ شود.
- اگر شروع یک درس با بیان یک سؤال کاربردی ملموس از آن درس باشد تا احساس نیاز به دانستن مطالب جدید را در دانش‌آموز احیا کند، بسیار مؤثرتر خواهد بود. به عنوان مثال برای شروع این فصل می‌توان مسئله محاسبه ارتفاع یک درخت با کمک یک میله یک متری در یک روز آفتابی را بیان کرد. جواب دادن به این سؤال با ابزار موجود، در دانش‌آموز برای فراگیری مطالب و جواب دادن به این سؤال ایجاد انگیزه می‌کند.

نگاه کلی به فصل

- هدف اصلی این فصل آموزش قضیه تالس و تشابه مثلث‌ها می‌باشد.
- چون قضیه تالس و تشابه مثلث‌ها مستلزم آشنایی با نسبت‌ها و تناسب می‌باشد، درس اول این فصل به آموزش تناسب و ویژگی‌های آن اختصاص یافته است تا دانش‌آموز مقدمات مواجهه با قضیه تالس و تشابه مثلث‌ها را فرا گرفته باشد. در همین راستا سعی شده است تناسب‌ها در مثلث‌های خاص مثلاً مثلث‌هایی که در یک رأس مشترک هستند و قاعده مقابل به رأس مشترک آنها روی یک خط راست قرار گرفته، بیان شوند. پس از فراگیری تناسب، در درس دوم قضیه تالس بیان می‌شود و فعالیت‌ها و تمرین‌هایی برای درک بهتر قضیه تالس ارائه می‌شود سپس تعمیم و عکس قضیه تالس بیان و اثبات می‌گردد.
- درس سوم اختصاص به تشابه مثلث‌ها دارد. بعد از تعریف تشابه در مثلث، قضیه‌های اسامی تشابه مثلث‌ها و حالت‌های تشابه دو مثلث در قالب سه قضیه متوالی بیان شده است. در بخش انتهایی درس سوم اثبات قضیه فیثاغورث به کمک تشابه مثلث‌ها آورده شده است. در اثبات تشابه دو مثلث در بسیاری از موارد

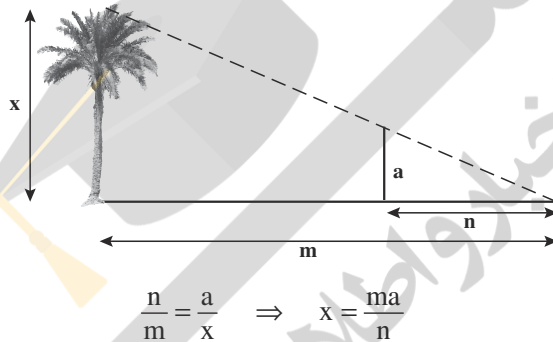
قضیه تالس هم استفاده می شود. بنابراین درس دوم این فصل را می توان به نوعی پیش نیاز درس سوم دانست. پس از فراگیری قضیه تالس و تشابه مثلث ها، در درس چهارم کاربردهایی از این دو موضوع بیان می گردد. ابتدا به کمک قضیه تالس ثابت می شود که نیمساز هر زاویه داخلی مثلث ضلع روبه روی آن زاویه را به نسبت اندازه های اضلاع آن زاویه تقسیم می کند. سپس به عنوان کاربردی از تشابه مثلث ها، نسبت ارتفاع ها، میانه ها، نیمسازها، محیط ها و مساحت های دو مثلث متشابه بحث می شود.

نقشه مفهومی



تصویر عنوانی

در تصویر ابتدای فصل دوم درختی با ارتفاع زیاد نمایش داده شده است که محاسبه ارتفاع آن به طور مستقیم امکان پذیر نیست. برای محاسبه ارتفاع آن از سایه آن و یک میله با طول مشخص استفاده شده است. بدین صورت که میله روی سایه درخت در ناحیه ای قرار داده شده است که انتهای سایه میله و درخت یکسان باشند. با اندازه گیری فاصله انتهای سایه ها از میله و درخت و استفاده از قضیه تالس، ارتفاع درخت محاسبه می شود.



دانستنی هایی برای معلم

تالس (Thales) فیلسوف و دانشمند یونانی بود که حدود ۲۶۰۰ سال پیش در شهر میلیتوس یونان (غرب ترکیه امروزی) به دنیا آمد. تالس هم عصر کوروش کبیر بوده است. او را به عنوان آغازگر فلسفه و علم می دانند.

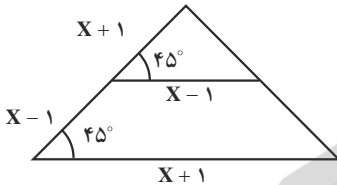
تالس اخترشناس قابلی نیز بوده و توانست خورشیدگرفتگی سال ۵۸۵ قبل از میلاد را پیش بینی کند. او توانست با قضیه تالس ارتفاع اهرام مصر را نیز اندازه گیری کند. قضایای زیر را به تالس نسبت می دهند:

- قطر دایره آن را نصف می کند.
- زوایای مجاور قاعده در مثلث متساوی الساقین برابرند.
- زوایای متقابل به رأس برابرند.
- زاویه ای که در نیم دایره محاط شود، قائمه است.
- اگر اندازه یک قاعده و زوایای آن داده شده باشند می توان مثلث را رسم کرد.

نمونه سؤال های ارزشیابی

۱ اگر $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$ باشد حاصل $\frac{2b-5}{2a-3}$ را به کمک ویژگی های تناسب بیابید.

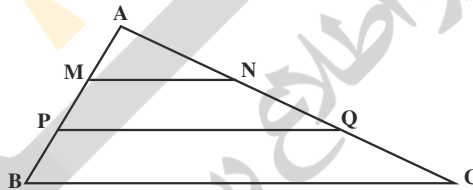
۲ در شکل مقابل مقدار x را بیابید.



۳ نسبت مساحت های دو مثلث مشابه برابر ۹ می باشد. نسبت محیط مثلث کوچک تر به محیط مثلث بزرگ تر چقدر است؟

۴ در شکل زیر $AM=MP=PB$ و $AN=NQ=QC$

ثابت کنید $MN + PQ = BC$



۵ میانگین هندسی دو عدد برابر ۷ می باشد. حاصل ضرب آنها چقدر است؟

۶ در یک مثلث قائم الزاویه اندازه دو پاره خطی که ارتفاع وارد بر وتر ایجاد می کند $\frac{3}{6}$ و $\frac{6}{4}$ است.

محیط این مثلث را بیابید.

۷ مثلثی به طول اضلاع ۳ و ۵ و ۷ با مثلثی به طول اضلاع ۵ و x و y مشابه است. اگر $x > 5$ و $y > 5$

باشند حاصل $x+y$ را بیابید.

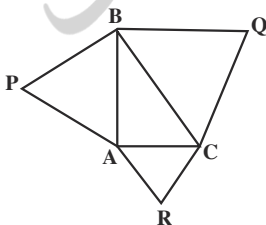
۸ در یک مثلث قائم الزاویه از وسط وتر عمودی بر ضلع قائم فرود می آوریم تا مثلث جدیدی حاصل

شود. مساحت مثلث اصلی چند برابر مساحت مثلث جدید است؟

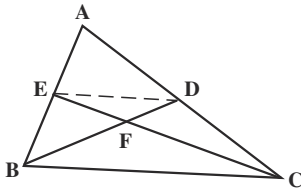
۹ مثلث قائم الزاویه ABC را در نظر بگیرید. اگر سه مثلث

متساوی الاضلاع به طول ضلع های مثلث ABC مطابق شکل

روبه رو در نظر بگیریم ثابت کنید :



$$S_{QBC} = S_{PAB} + S_{RAC}$$



۱۰ در شکل روبه‌رو BD و CE دو میانهٔ مثلث هستند.

نسبت مساحت مثلث FED به FBC را بیابید.

۱۱ اندازهٔ محیط‌های دو مثلث متشابه برابر ۱۵ و ۸ می‌باشد. اگر مساحت مثلث بزرگ‌تر ۲۵ باشد مساحت مثلث کوچک‌تر چقدر است؟

۱۲ وسط اضلاع روبه‌رو در یک چهارضلعی دلخواه را به هم وصل می‌کنیم. ثابت کنید این دو پاره خط همدیگر را نصف می‌کنند.

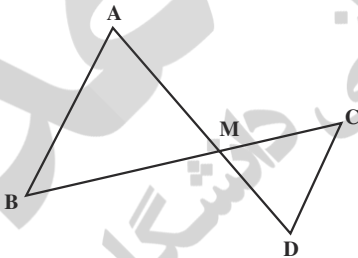
۱۳ زاویه‌های خارجی مثلثی با اعداد ۲ و ۳ و ۴ متناسب‌اند، اندازهٔ کوچک‌ترین زاویهٔ داخلی مثلث چقدر است؟

۱۴ در دو مثلث متشابه ABC و A'B'C' داریم $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = 2$. اگر AM و A'M' به ترتیب میانه‌های رأس A و A' باشند، نسبت $\frac{S_{ABM}}{S_{A'C'M'}}$ چقدر است؟

۱۵ در دو مثلث متشابه نسبت بین دو ارتفاع متناظر برابر $\frac{1}{4}$ است. اگر مساحت مثلث کوچک‌تر ۵ باشد مساحت مثلث بزرگ‌تر چقدر است؟

۱۶ در شکل روبه‌رو $AB \parallel CD$ و $\frac{AM}{AD}$ ، نسبت

مساحت مثلث AMB به مثلث CMD چقدر است؟



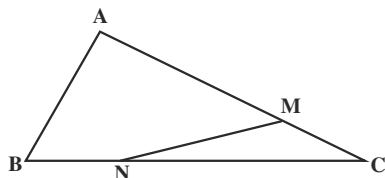
۱۷ مثلثی با طول اضلاع ۴ و ۶ و $2\sqrt{3}$ و مثلث دیگری با طول اضلاع ۹ و $3\sqrt{3}$ و ۶ مفروض‌اند.

نسبت مساحت مثلث کوچک‌تر به مثلث بزرگ‌تر چقدر است؟

۱۸ یک مثلث را به چهار مثلث هم‌نهشت تقسیم کرده‌ایم، محیط مثلث اولیه چند برابر محیط یکی از

مثلث‌های هم‌نهشت می‌باشد؟

فصل دوم : قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن ۲۱



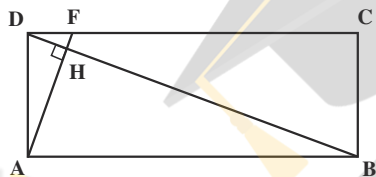
۱۹ در شکل مقابل $\frac{CM}{MA} = \frac{BN}{NC} = \frac{1}{3}$. نسبت

مساحت مثلث ABC به مساحت چهارضلعی AMNB چقدر است؟

۲۰ در مثلث متساوی الاضلاعی به طول ضلع ۲ یک مربع محاط کرده ایم . طول ضلع مربع چقدر است؟

۲۱ چهارضلعی ABCD یک مستطیل است . F نقطه ای از ضلع DC است که $AF \perp DB$. اگر

$AB = 3DA$ باشد آن گاه DC چند برابر DF است؟



نسبت و تناسب در هندسه

درس اول

اهداف درس اول

- ۱ درک دقیق و روشن تناسب و ویژگی های آن.
- ۲ فراگیری رابطه بین نسبت طول دو ضلع از مثلث با نسبت ارتفاع های وارد بر آن دو ضلع.
- ۳ توانایی یافتن نسبت مساحت های دو مثلث که دارای یک ارتفاع مساوی هستند.
- ۴ توانایی تعیین نسبت های مساحت های دو مثلث که در یک رأس مشترک باشند و قاعده مقابل آن رأس مشترک در هر دو مثلث روی یک خط مشترک واقع باشند.
- ۵ درک تساوی مساحت دو مثلث که دارای یک قاعده مشترک هستند و رأس مقابل به این قاعده در هر دو مثلث، روی خطی موازی قاعده مشترک واقع باشد.
- ۶ تعریف واسطه هندسی و توانایی محاسبه آن.

روش تدریس درس اول

- هدف فعالیت ۱ این درس بیان کاربردی تناسب می باشد تا دانش آموز به اهمیت تناسب در مسائل ریاضی پی ببرد.
- در فعالیت ۲ و کار در کلاس های صفحه ۳۱ و ۳۲ حالت خاصی از فعالیت ۱ در نظر گرفته شده است که منجر به نتایج جالبی (نتیجه ۱ و ۲ و ۳) شده است.
- در فعالیت ۲ و کار در کلاس های صفحه ۳۱ و ۳۲ نسبت مساحت مثلث هایی که ارتفاع های یکسان دارند در حالت های مختلف به دست آمده است.
- در فعالیت ۲ وقتی ارتفاع ها مساوی اند نسبت مساحت ها به دست آمده است و در کار در کلاس صفحه ۳۱ وقتی ارتفاع ها مشترک هستند نسبت مساحت ها به دست آمده است.
- در کار در کلاس صفحه ۳۲ وقتی ارتفاع ها مساوی اند و قاعده ای که ارتفاع ها بر آن وارد شده اند مشترک هستند نسبت مساحت ها به دست آمده است.

□ حال که تناسب تعریف شده است و اهمیت آن در مسائل ریاضی و هندسه مشخص گردیده است لازم است، دانش آموزان مهارت محاسبات با تناسب را فراگیرند. در این رابطه معلم می تواند با بیان مثال ها و تمرین های مناسب، ویژگی های تناسب را که در صفحه ۳۲ آمده است برای دانش آموزان بیان کند.

□ برای تعریف واسطه هندسی بهتر است معلم قبل از اینکه نامی از واسطه هندسی ببرد، بیان کند که در تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ اگر یا $a = d$ یا $c = b$ باشد چه نتیجه ای حاصل می شود؟ مثلاً فرض کنید $a = d$ پس $\frac{a}{b} = \frac{c}{a}$ که با طرفین وسطین نتیجه می شود $a^2 = bc$. در این لحظه بیان کند که «a» را واسطه هندسی «b و c» می نامند.

حل تمرین های درس اول

۱

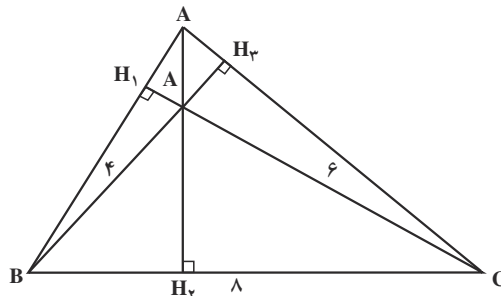
$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{6} = \frac{3}{5} \rightarrow \frac{x+y+z}{2+3+6} = \frac{3}{5} \rightarrow x+y+z = \frac{33}{5}$$

۲ $b=8$ و $c=10$ و a واسطه هندسی b و c است.
 $a^2 = bc \rightarrow a^2 = 80 \rightarrow a = \sqrt{80}$

۳ چون در هر مثلث نسبت اندازه های هر دو ضلع، با عکس نسبت ارتفاع های وارد بر آنها برابر است بنابراین بلندترین ارتفاع مثلث به کوتاه ترین ضلع یعنی ضلع AB که طول آن ۴ است وارد می شود. بنابراین:

$$\frac{AH_2}{CH_1} = \frac{AB}{BC} \rightarrow \frac{AH_2}{3\sqrt{15}} = \frac{4}{8} \rightarrow AH_2 = \frac{3\sqrt{15}}{2}$$

$$\frac{BH_3}{CH_1} = \frac{AB}{AC} \rightarrow \frac{BH_3}{3\sqrt{15}} = \frac{4}{6} \rightarrow BH_3 = \sqrt{15}$$



۴ رأس A در سه مثلث ACE و ADE و ABD مشترک است و ضلع مقابل رأس A در هر سه مثلث روی یک خط قرار دارد، بنابراین مساحت این سه مثلث متناسب با طول ضلع مقابل به رأس A در آنها می باشد پس:

$$\frac{S_{ACE}}{S_{ADE}} = \frac{EC}{DE} \Rightarrow \frac{3}{1} = \frac{EC}{DE} \Rightarrow DE = \frac{1}{3}EC$$

$$\frac{S_{ACE}}{S_{ABD}} = \frac{EC}{BD} \Rightarrow \frac{2}{1} = \frac{EC}{BD} \Rightarrow BD = \frac{1}{2}EC$$

بنابراین:

$$\frac{DE}{BD} = \frac{\frac{1}{3}EC}{\frac{1}{2}EC} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{BC}{DE} = \frac{BD + DE + EC}{\frac{1}{3}EC} = \frac{\frac{1}{2}EC + \frac{1}{3}EC + EC}{\frac{1}{3}EC} = \frac{\frac{11}{6}EC}{\frac{1}{3}EC} = \frac{11}{2}$$

۵ پای ارتفاع وارد بر ضلع BD در مثلث DBC را H می نامیم.

چون خط d با پاره خط BC موازی است پس مساحت دو مثلث ABC و DBC برابرند.

$$S_{DBC} = 8 \text{ cm}^2$$

اما داریم:

$$S_{DBC} = \frac{1}{2}CH \times BD \Rightarrow 8 = \frac{1}{2}CH \times 6 \Rightarrow CH = \frac{8}{3}$$

قضیه تالس

درس دوم

اهداف درس دوم

- ۱ درک قضیه تالس و توانایی بیان و اثبات آن به کمک تناسب توسط دانش آموز
- ۲ درک تعمیم قضیه تالس و رابطه آن با قضیه تالس
- ۳ آشنایی دانش آموزان با عکس قضیه تالس و روش اثبات آن

روش تدریس درس دوم

مطابق الگوی بیان شده در صفحه ۳۴، لازم است که معلم ابتدا تناسب $\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DB}$ را با استفاده از مطالب درس اول و با همکاری دانش آموزان نتیجه بگیرد و بعد قضیه تالس را بیان کند.

کار در کلاس ۱ بیانگر کاربرد قضیه تالس در محاسبه طول برخی از اضلاع مثلث ها می باشد و در واقع مهارت به کار بردن قضیه تالس را بالا می برد.

فعالیت ۱ نیز با همین روند ابتدا تعمیم قضیه تالس را بدون ذکر نامی از آن و با کمک دانش آموزان اثبات می کند و سپس صورت قضیه را بیان می دارد. کار در کلاس صفحه ۳۵ نیز برای جا افتادن تعمیم قضیه تالس برای دانش آموز بیان شده است. در این لحظه از دانش آموز سؤال شود که به نظر شما عکس قضیه تالس درست است؟ و از آنها بخواهیم تا عکس قضیه تالس را بیان کنند و در مورد درستی یا نادرستی آن بحث کنند. سپس عکس قضیه و اثبات آن ارائه شود.

حل تمرین های درس دوم

۱ طبق قضیه تالس داریم :

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{2}{DB} = \frac{1}{5} \rightarrow DB = 1$$

$$\Rightarrow AB = AD + DB = 2 + 1 = 3$$

$$\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{1}{15} = \frac{DE}{4} \Rightarrow DE = \frac{4}{15} = \frac{8}{3}$$

۲ طبق قضیه تالس داریم :

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{2}{x+2} \rightarrow 2x = x+2 \rightarrow x = 2$$

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{1}{1+x} = \frac{x-5}{BC} \xrightarrow{x=2} \frac{1}{3} = \frac{15}{BC}$$

$$\Rightarrow BC = 45$$

۳ طبق قضیه تالس داریم :

$$\frac{AN}{NC} = \frac{AM}{MB} \Rightarrow \frac{9}{x} = \frac{x}{4} \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6$$

$$\frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{9}{9+x} = \frac{2y-1}{x+2} \xrightarrow{x=6} \frac{9}{15} = \frac{2y-1}{8}$$

$$\Rightarrow 2y-1 = \frac{72}{15} \Rightarrow y = \frac{47}{3}$$

۴ در مثلث OAB' چون $AB' \parallel AB$ طبق قضیه تالس داریم :

$$\frac{OB'}{OB} = \frac{OA'}{OA} \quad (1)$$

در مثلث OBC' چون $BC' \parallel BC$ طبق قضیه تالس داریم :

$$\frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} \quad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow \frac{OA'}{OA} = \frac{OC'}{OC} \quad (3)$$

در مثلث $OA'C'$ با توجه به رابطه (۳) و عکس قضیه تالس نتیجه می شود $AC \parallel A'C'$

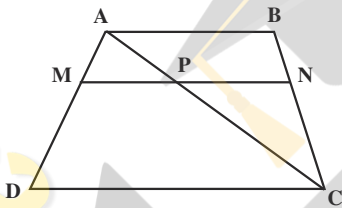
۵ در مثلث ADE چون $BC \parallel DE$ طبق قضیه تالس داریم :

$$\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD} \quad (۱)$$

در مثلث ADF چون $BE \parallel DF$ طبق قضیه تالس داریم :

$$\frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AD}$$

$$(۱) \text{ و } (۲) \Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{AE}{AF} \Rightarrow AE^2 = AC \cdot AF$$



۷ یکی از قطرهای دوزنقه ABCD مثلاً قطر AC را رسم

می کنیم و نقطه برخورد آن با پاره خط MN را P می نامیم. در

مثلث ADC چون $MP \parallel DC$ طبق قضیه تالس داریم :

$$\frac{AM}{MD} = \frac{AP}{PC} \quad (۱)$$

در مثلث ABC چون $PN \parallel AB$ طبق قضیه تالس داریم :

$$\frac{BN}{NC} = \frac{AP}{PC} \quad (۲)$$

$$(۱) \text{ و } (۲) \Rightarrow \frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$$

۸ فرض کنید فاصله توپ از زمین مسابقه برابر x باشد.

طبق اطلاعات صورت مسئله شکل زیر را خواهیم داشت :

چون $DE \parallel BC$ طبق قضیه تالس در مثلث ABC داریم :

$$\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{90}{110} = \frac{243}{x} \Rightarrow x = 297 \text{ cm}$$

قد این بازیکن ۱۸۰ cm است و توپ هم ۳۰ cm بالای سر اوست، بنابراین

$$\text{میزان پرش بازیکن} = 297 - 180 - 30 = 87 \text{ cm}$$

تشابه مثلث‌ها

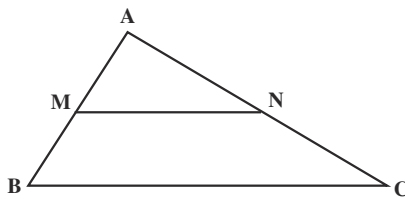
درس سوم

اهداف درس سوم

- ۱ دانش‌آموز با مفهوم تشابه دو مثلث و رابطه بین زاویه‌ها و اضلاع دو مثلث متشابه آشنا شود.
- ۲ آشنایی با قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌ها و فراگیری حالت‌های مختلف تشابه مثلث‌ها و تسلط بر آنها با ارائه مثال‌های مناسب.
- ۳ دانش‌آموز بتواند قضیهٔ معروف فیثاغورس را که در گذشته بارها آن را به کار برده است به کمک تشابه مثلث‌ها اثبات کند.
- ۴ دانش‌آموز بتواند رابطه‌های طولی اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه و پاره‌خط‌هایی که توسط ارتفاع وارد بر وتر آن مثلث حاصل می‌شوند را درک و بیان کند.

روش تدریس درس سوم

- چون دانش‌آموزان در سال گذشته با مفهوم تشابه آشنا شده‌اند در ابتدای این درس از دانش‌آموزان سؤال شود که تشابه و ویژگی‌های آن چیست؟
- پس از بحثی مختصر، تعریف تشابه دو مثلث بیان شود و برای مثال مثلث ABC و پاره‌خط MN که $MN \parallel BC$ رسم شود.



و بررسی شود که دو مثلث AMN و ABC تمام شرایط تعریف تشابه دو مثلث را دارند، بنابراین متشابه هستند سپس صورت قضیه اساسی تشابه مثلث‌ها بیان شود.

□ سپس از دانش‌آموزان سؤال شود که آیا برای بیان بررسی تشابه دو مثلث لازم است که هر شش شرط تشابه (یعنی تساوی زاویه‌های متناظر و متناسب بودن اضلاع متناظر) بررسی شود یا برخی از آنها می‌توانند باقی را نتیجه دهند.

□ سپس بیان شود که جواب مثبت است و در برخی موارد نیاز به بررسی هر شش شرط نیست. مثلاً اگر دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگری برابر باشد آن دو مثلث متشابه هستند و چهار شرط دیگر برقرار خواهند بود، سپس صورت قضیه ۱ بیان شود.

□ قضایای ۲ و ۳ نیز به همین صورت بیان و اثبات شوند.

مثال صفحه ۴۰ بیانگر یک کاربرد عملی از تشابه مثلث‌ها می‌باشد. و دو مثال صفحه ۴۱ برای افزایش مهارت دانش‌آموزان در به‌کارگیری تشابه مثلث‌ها هستند.

در این لحظه از دانش‌آموزان سؤال شود که آیا رابطه فیثاغورس را که یکی از روابط مهم ریاضی است را به خاطر دارند. و از آنها خواسته شود تا صورت آن را بیان کنند سپس سؤال شود که آیا در مورد اثبات آن تا به حال فکر کرده‌اید. اینک با استفاده از تشابه مثلث‌ها قادر به اثبات این قضیه می‌باشیم. سپس اثبات قضیه با کمک دانش‌آموزان و مرحله به مرحله مطابق کتاب انجام گیرد.

نتیجه وسط صفحه ۴۲ روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه هستند که بررسی آنها به دانش‌آموزان واگذار شود.

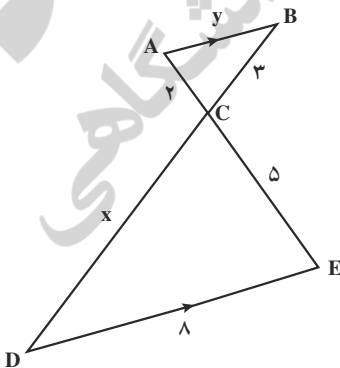
حل تمرین‌های درس سوم

۱ شکل اول :

$$AB \parallel DE \rightarrow \hat{A} = \hat{E} \text{ و } \hat{B} = \hat{D}$$

پس دو مثلث ABC و CDE به حالت دو زاویه با هم

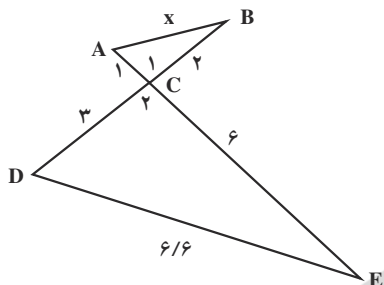
متشابه هستند. بنابراین



$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{CE} \Rightarrow \frac{y}{8} = \frac{2}{5} \Rightarrow y = \frac{16}{5}$$

$$\frac{AC}{CE} = \frac{BC}{CD} \Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{x}{8} \Rightarrow x = \frac{16}{5}$$

شکل دوم :

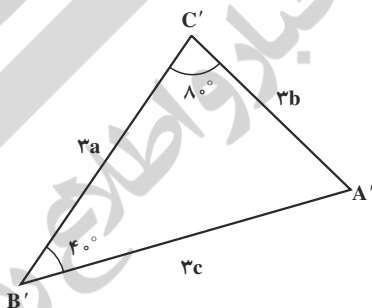
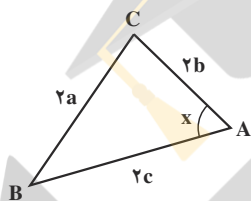


$$\left. \begin{aligned} \frac{AC}{DC} = \frac{BC}{CE} = \frac{1}{3} \\ \hat{C}_1 = \hat{C}_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{دو مثلث } ABC \text{ و } DCE$$

به حالت دو ضلع متناسب و زاویه بین مساوی، متشابه هستند. بنابراین :

$$\frac{AC}{DC} = \frac{AB}{DE} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{x}{6/6} \Rightarrow x = 2/2$$

شکل سوم :

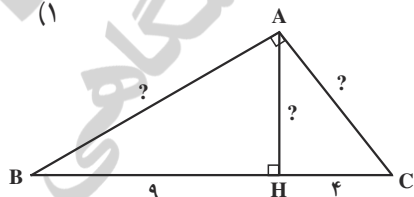


$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{2}{3} \Rightarrow \text{دو مثلث } ABC \text{ و } A'B'C' \text{ به حالت سه ضلع متناسب،}$$

متشابه هستند. بنابراین زاویه های مقابل به اضلاع متناسب، برابرند پس :

$$x = \hat{A} = \hat{A}' = 180^\circ - (80^\circ + 40^\circ) = 60^\circ$$

(۱)

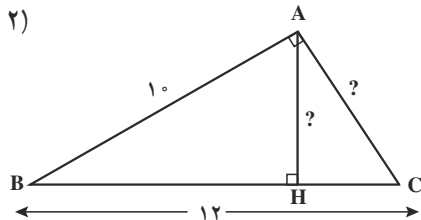


$$AB^2 = BH \times BC \rightarrow AB^2 = 9 \times 13 = 117 \rightarrow AB = \sqrt{117}$$

$$AC^2 = CH \times CB \rightarrow AC^2 = 4 \times 13 = 52 \rightarrow AC = \sqrt{52}$$

$$AH^2 = BH \times HC = 9 \times 4 = 36 \Rightarrow AH = 6$$

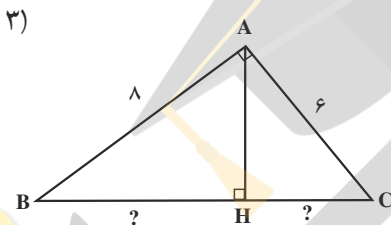
فصل دوم : قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن ۳۱



$$AB^2 = BH \times BC \Rightarrow 10^2 = BH \times 12 \Rightarrow BH = \frac{100}{12} = \frac{25}{3} \Rightarrow CH = 12 - \frac{100}{12} = \frac{44}{12} = \frac{11}{3}$$

$$AC^2 = CH \times CB = \frac{11}{3} \times 12 = 44 \Rightarrow AC = \sqrt{44}$$

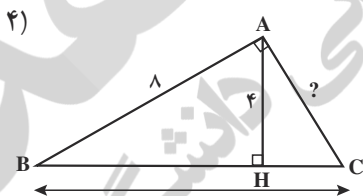
$$AH \times BC = AB \times AC \Rightarrow AH \times 12 = 10 \times \sqrt{44} \Rightarrow AH = \frac{5\sqrt{11}}{3}$$



$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \rightarrow BC^2 = 8^2 + 6^2 = 100 \rightarrow BC = 10$$

$$AB^2 = BH \times BC \Rightarrow 8^2 = BH \times 10 \Rightarrow BH = 64/10 = 6.4$$

$$CH = BC - BH = 10 - 6.4 = 3.6$$



$$\Rightarrow \text{مثلث } ABH \text{ قائم الزاویه است.} \Rightarrow AB^2 = AH^2 + BH^2 \Rightarrow 8^2 = 4^2 + BH^2 \Rightarrow$$

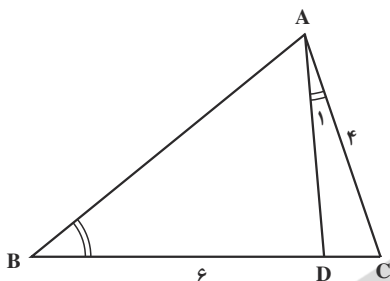
$$BH^2 = 48 \Rightarrow BH = 4\sqrt{3}$$

$$AH^2 = BH \times HC \Rightarrow 4^2 = (4\sqrt{3}) \times HC \Rightarrow HC = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$BC = BH + HC = 4\sqrt{3} + \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{16\sqrt{3}}{3}$$

$$AC^2 = BC^2 - AB^2 = \frac{256}{3} - 64 = \frac{64}{3}$$

$$\Rightarrow AC = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$



$$\left. \begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{B} \\ \hat{C} \text{ مشترک} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ACD \sim \triangle ABC$$

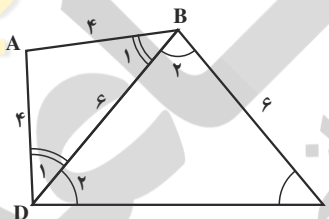
بنابراین:

$$\frac{DC}{AC} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{DC}{4} = \frac{4}{BD+DC} \Rightarrow \frac{DC}{4} = \frac{4}{6+DC}$$

$$\Rightarrow (6+DC)DC = 16 \Rightarrow DC^2 + 6DC - 16 = 0$$

$$\Rightarrow (DC+8)(DC-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} DC = -8 \\ DC = 2 \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

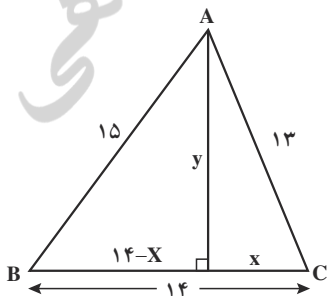
$$\Rightarrow BC = BD + DC = 6 + 2 = 8$$



$$\left. \begin{array}{l} BC = BD \Rightarrow \hat{D}_\gamma = \hat{C} \\ AB = AD \Rightarrow \hat{B}_\gamma = \hat{D}_\gamma \\ AB \parallel DC \Rightarrow \hat{B}_\gamma = \hat{D}_\gamma \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{B}_\gamma = \hat{C} = \hat{D}_\gamma = \hat{D}_\gamma$$

بنابراین مثلث‌های ABD و BCD به حالت دو زاویه برابر، متشابه هستند. پس

$$\frac{DC}{BD} = \frac{BD}{AB} \Rightarrow \frac{DC}{6} = \frac{6}{4} \Rightarrow DC = 9$$



در مثلث قائم‌الزاویه AHC داریم:

$$AC^2 = AH^2 + HC^2$$

$$13^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 169 \quad (1)$$

در مثلث قائم الزاویه AHB داریم :

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 \Rightarrow 15^2 = y^2 + (14-x)^2$$

$$\Rightarrow y^2 + 198 - 28x + x^2 = 225$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 28x = 27$$

با توجه به رابطه (۱) داریم :

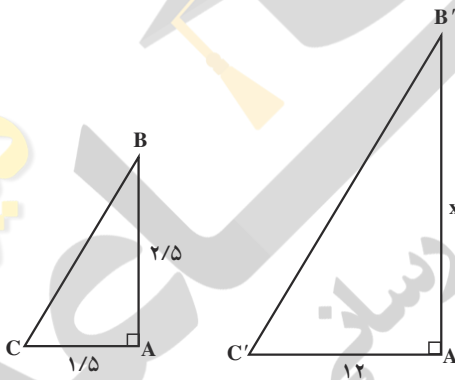
$$169 - 28x = 27 \Rightarrow 28x = 142 \Rightarrow x = 5$$

$$x^2 + y^2 = 169 \Rightarrow y^2 = 169 - x^2 = 169 - 25 = 144$$

$$\Rightarrow y = 12$$

$$ABC \text{ مساحت مثلث} = \frac{1}{2} AH \times BC = \frac{1}{2} \times 12 \times 14 = 84$$

۶ الف) زاویه بین هر جسم عمود بر زمین و شعاع تابشی خورشید در یک لحظه مشخص مقداری ثابت است. بنابراین $\hat{B} = \hat{B'}$ بنابراین دو مثلث ABC و A'B'C' به حالت تساوی دو زاویه متشابه هستند.

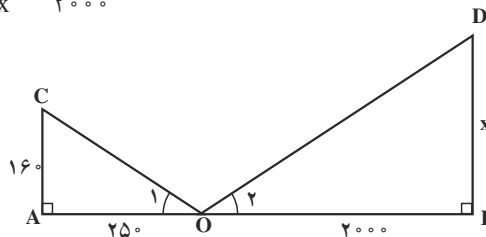


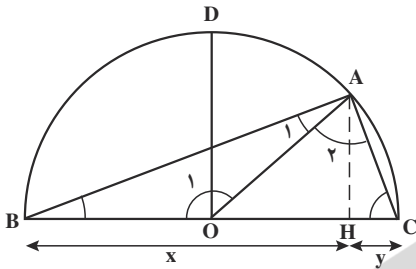
بنابراین :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} \Rightarrow \frac{2/5}{x} = \frac{1/5}{12} \Rightarrow x = \frac{3}{1/5} = 2 \text{ m}$$

ب) می‌دانیم زاویه تابش و انعکاس یکسان می‌باشند. بنابراین $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ بنابراین دو مثلث AOC و DOB متشابه هستند (به حالت تساوی دو زاویه) بنابراین :

$$\frac{AC}{BD} = \frac{OA}{OB} \Rightarrow \frac{16}{x} = \frac{25}{2000} \Rightarrow x = 128 \text{ cm} = 12/8 \text{ m}$$





۷ الف) چون زاویه A یک زاویه محاطی مقابل

به کمان 180° درجه است بنابراین $\hat{A} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$

ب) مطابق شکل واضح است که $OD \geq AH$

پ) در مثلث قائم الزاویه ABC طبق روابط طولی

داریم:

$$AH^2 = CH \times HB = xy \Rightarrow AH = \sqrt{xy}$$

از طرفی OD برابر شعاع دایره است پس BC دو برابر OD است بنابراین

$$x + y = 2OD \Rightarrow OD = \frac{x + y}{2}$$

و با توجه به قسمت (ب) داریم:

$$\frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

ت) بله. مطابق قسمت (پ) این نامساوی صحیح است و بیان می‌دارد که میانگین حسابی دو عدد مثبت،

بزرگ‌تر یا مساوی میانگین هندسی آنها است.

۸ الف) اگر a و b و c طول اضلاع یک

مثلث باشند و $a^2 = b^2 + c^2$ باشد آن‌گاه آن مثلث

قائم‌الزاویه است.

ب) دو پاره‌خط $A'B'$ و $A'C'$ را که بر

هم عمود هستند و $A'B' = AB$ و $A'C' = AC$

هستند را رسم می‌کنیم.

B' و C' را به هم وصل می‌کنیم تا مثلث

قائم‌الزاویه $A'B'C'$ حاصل شود.

طبق رابطه فیثاغورس در مثلث $A'B'C'$ داریم:

$$(B'C')^2 = (A'B')^2 + (A'C')^2 = (AB)^2 + (AC)^2 = c^2 + b^2$$

اما طبق صورت مسئله (قسمت الف) داریم $a^2 = b^2 + c^2$ بنابراین:

$$B'C'^2 = a^2 \Rightarrow B'C' = a \Rightarrow B'C' = BC$$

پس دو مثلث ABC و $A'B'C'$ به حالت تساوی سه ضلع هم‌نهشت هستند. بنابراین مثلث ABC نیز

قائم‌الزاویه است.

ج) یک مثلث قائم‌الزاویه است، اگر و تنها اگر مربع ضلع بزرگ‌تر برابر مجموع مربع‌های دو ضلع دیگر باشد.

کاربردهایی از قضیه تالس و تشابه مثلث ها

درس چهارم

اهداف درس چهارم

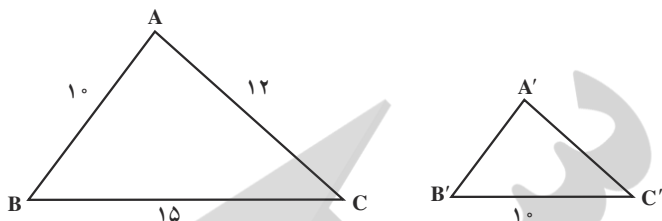
- ۱ دانش آموز بتواند به کمک قضیه تالس ثابت کند که در هر مثلث نیمساز هر زاویه داخلی، قاعده مقابل به آن زاویه را به نسبت ضلع های آن زاویه تقسیم می کند.
- ۲ دانش آموز به کمک تشابه مثلث ها ثابت کند در دو مثلث متشابه نسبت ارتفاع ها، میانه ها، نیمساز های متناظر برابر نسبت تشابه است و نسبت مساحت ها برابر مربع نسبت تشابه و نسبت محیط ها برابر نسبت تشابه است.

روش تدریس درس چهارم

- بهتر است برای شروع این درس، معلم برای دانش آموزان بیان کند که حال که در درس های قبلی با قضیه تالس و تشابه مثلث ها آشنا گشته ایم می خواهیم چند کاربرد از این مطالب را در درس جدید بیان کنیم.
- یکی از کاربردهای قضیه تالس در قضیه نیمساز های زوایای داخلی مثلث است. سپس صورت قضیه صفحه ۴۵ بیان شود، و اثبات آن به کمک دانش آموزان مطابق کتاب انجام پذیرد.
- مثال صفحه ۴۵ و کار در کلاس صفحه ۴۶ برای درک بهتر قضیه نیمساز های زاویه های داخلی می باشند.
- در ادامه معلم بیان کند که حال می خواهیم کاربردی از تشابه مثلث ها را بیان کنیم.
- با استفاده از تشابه مثلث ها می توان نسبت ارتفاع ها، میانه ها، نیمساز ها و محیط ها و مساحت های متناظر دو مثلث را به دست آورد.
- سپس قضیه صفحه ۴۶ بیان و اثبات گردد.
- سپس از دانش آموزان سؤال شود که نتایج به دست آمده برای نسبت محیط و مساحت دو مثلث متشابه آیا قابل تعمیم برای چند ضلعی ها نیز می باشد؟
- پس از بحث در مورد آن، کار در کلاس بالای صفحه ۴۸ انجام شود و نتیجه آن به طور واضح بیان گردد.
- سپس در مورد تشابه بودن دو n ضلعی منتظم بحث شود.

حل تمرین‌های درس چهارم

۱



بزرگ‌ترین ضلع مثلث $A'B'C'$ نظیر بزرگ‌ترین ضلع مثلث ABC است پس مطابق شکل $B'C'$ نظیر BC که طول آن ۱۵ است می‌باشد.

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \quad \text{نسبت تناسب}$$

بنابراین

$$\Rightarrow \frac{\text{محیط } A'B'C'}{\text{محیط } ABC} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{\text{محیط } A'B'C'}{15 + 10 + 12} = \frac{2}{3} \Rightarrow \text{محیط } A'B'C' = \frac{74}{3}$$

۲ دو مثلث AMN و ABC متشابه هستند و نسبت تشابه برابر $k = \frac{AB}{AM}$ است. بنابراین:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AMN}} = k^2 \Rightarrow \frac{S_{ABC} - S_{AMN}}{S_{AMN}} = k^2 - 1 \Rightarrow \frac{S_{MNCB}}{S_{AMN}} = k^2 - 1$$

$$\Rightarrow k^2 - 1 = 8 \Rightarrow k = 3$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AM} = 3 \Rightarrow \frac{AB - AM}{AM} = 3 - 1$$

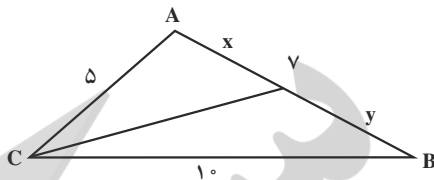
$$\Rightarrow \frac{MB}{MA} = 2$$

۳ می‌دانیم که هر نیمساز، قاعده وارد بر آن را به نسبت دو ضلع آن تقسیم می‌کند. بنابراین :

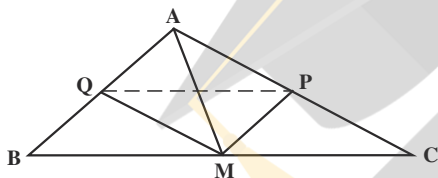
$$\frac{x}{5} = \frac{y}{10} \text{ و } x + y = 7$$

$$\Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{y}{10} = \frac{x+y}{15} = \frac{7}{15}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{5} = \frac{7}{15} \Rightarrow x = \frac{7}{3} \\ \frac{y}{10} = \frac{7}{15} \Rightarrow y = \frac{14}{3} \end{cases}$$



۴ در مثلث AMB، MQ نیمساز است. بنابراین :



$$\frac{AQ}{QB} = \frac{AM}{MB} \quad (1)$$

در مثلث AMC، MP نیمساز است. بنابراین :

$$\frac{AP}{PC} = \frac{AM}{MC} \quad (2)$$

چون $MB=MC$ از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$$\frac{AP}{PC} = \frac{AQ}{QB}$$

بنابراین طبق عکس قضیه تالس داریم : $PQ \parallel BC$

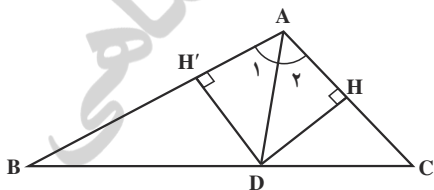
۵ الف) طبق نتیجه ۲ درس اول نسبت

مساحت دو مثلث ABD و ACD برابر نسبت

اضلاع روبه‌روی زاویه A_1 و A_2 در آنهاست پس :

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{BD}{DC} \quad (1)$$

ب) چون D روی نیمساز زاویه A قرار دارد پس فاصله آن از دو ضلع زاویه A یکسان است بنابراین $DH=DH'$.



با توجه به نتیجه ۱ درس اول چون در دو مثلث ABD و ACD ارتفاع‌های DH و DH' برابرند، نسبت مساحت‌های دو مثلث برابر نسبت قاعده‌های آنهاست یعنی :

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{AB}{AC} \quad (۲)$$

(ج) با توجه به روابط (۱) و (۲) درستی قضیه نیمسازها اثبات می‌شود یعنی :

$$\Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \quad (۲) \text{ و } (۱)$$

۶ چون BE دو برابر ED است پس $\frac{BE}{BC} = \frac{۲}{۳}$. از طرف دیگر داریم :

$$\frac{AB}{CD} = \frac{۲a}{۳a} = \frac{۲}{۳}$$

$$\frac{AE}{CB} = \frac{۴b}{۶b} = \frac{۲}{۳}$$

بنابراین :

$$\frac{BE}{BD} = \frac{AB}{CD} = \frac{AE}{CB}$$

پس دو مثلث ABE و CBD به حالت تناسب سه ضلع متشابه هستند.

بنابراین زاویه‌های روبه‌رو به اضلاع متناسب در دو مثلث با هم برابرند پس :

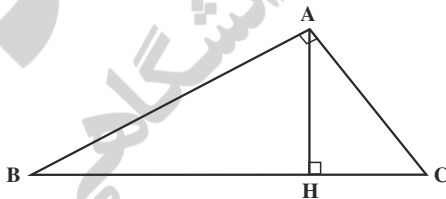
$$\begin{cases} 2x - 1 = y + 15 \\ 2x - 7 = x + y \end{cases} \Rightarrow x = 9 \quad y = 2$$

چون نسبت اضلاع متناظر مثلث BCD به مثلث ABE برابر $\frac{۳}{۲}$ می‌باشد بنابراین :

$$\frac{S_{BCD}}{S_{ABE}} = \left(\frac{۳}{۲}\right)^2 = \frac{۹}{۴}$$

۷ الف) مثلث‌های ABC و ABH

متشابه‌اند و نسبت تشابه آنها $\frac{AB}{BC}$ است :



بنابراین :

$$\frac{S_{ABH}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2$$

به همین ترتیب مثلث‌های ACH و ABC با نسبت تشابه $\frac{AC}{BC}$ متشابه‌اند و داریم :

$$\frac{S_{ACH}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2$$

(ب) با جمع دو طرف قسمت الف داریم :

$$\frac{S_{ABH}}{S_{ABC}} + \frac{S_{ACH}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 + \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 \Rightarrow \frac{S_{ABH} + S_{ACH}}{S_{ABC}} = \frac{AB^2}{BC^2} + \frac{AC^2}{BC^2}$$

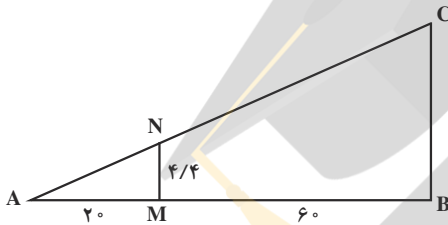
چون $S_{ABH} + S_{ACH} = S_{ABC}$ داریم :

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = \frac{AB^2 + AC^2}{BC^2} \Rightarrow \frac{AB^2 + AC^2}{BC^2} = 1$$

$$\Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$$

▲ از چشم ناظر خط راستی موازی زمین

رسم می کنیم شکل زیر حاصل می شود :



طبق قضیه تالس با توجه به موازی بودن MN

و BC داریم :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{20}{80} = \frac{4/4}{BC}$$

$$\Rightarrow BC = 17/6 \text{ m}$$

بنابراین فاصله عمودی چشمان ناظر از نوک آنتن برابر ۱۷/۶ متر می باشد :

پس :

$$\text{ارتفاع ساختمان} = 17/6 - 3/2 + 1/6 = 16 \text{ m}$$

۹ واحد همه طول های موجود را به cm

تبدیل می کنیم.

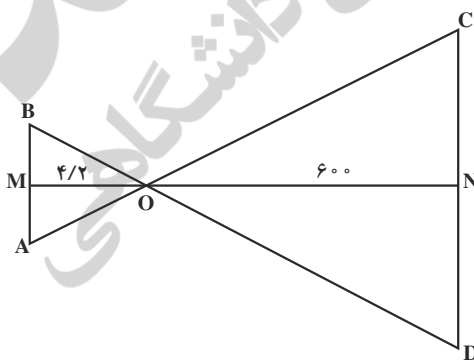
بنابراین $CD \parallel AB$:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{B} = \hat{D} \\ \hat{A} = \hat{C} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle OAB \sim \triangle OCD$$

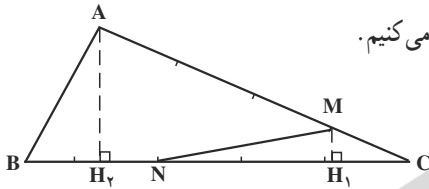
بنابراین نسبت ارتفاع های نظیر در دو مثلث

نیز برابر نسبت تشابه می باشد پس :

$$\frac{AB}{CD} = \frac{OM}{ON} \Rightarrow \frac{3/5}{CD} = \frac{4/2}{60} \Rightarrow CD = 50 \text{ cm} = 5 \text{ m}$$



حل برخی از نمونه سؤال های ارزشیابی



پاسخ سؤال ۱۹) ارتفاع های AH_2 و MH_1 را رسم می کنیم.

در مثلث ACH_2 داریم $AH_2 \parallel MH_1$ پس:

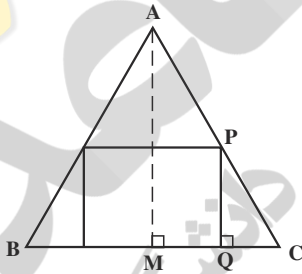
$$\frac{MH_1}{AH_2} = \frac{CM}{CA} = \frac{1}{4}$$

بنابراین:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{MNC}} = \frac{\frac{1}{2} BC \cdot AH_2}{\frac{1}{2} NC \cdot MH_1} = \frac{BC}{NC} \cdot \frac{AH_2}{MH_1} = \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{1} = \frac{16}{3}$$

$$S_{ABNM} = S_{ABC} - S_{MNC} = S_{ABC} - \frac{3}{16} S_{ABC} = \frac{13}{16} S_{ABC}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{ABNM}} = \frac{16}{3}$$



پاسخ سؤال ۲۰) در مثلث AMC طبق قضیه فیثاغورس

داریم:

$$AC^2 = AM^2 + MC^2$$

$$\Rightarrow 2^2 = AM^2 + 1^2 \Rightarrow AM = \sqrt{3}$$

طول ضلع مربع محاط شده را برابر a در نظر می گیریم،

بنابراین:

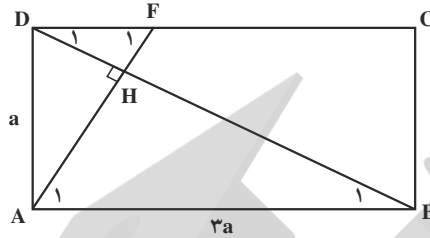
$$PQ = a \text{ و } CQ = 1 - \frac{a}{2}$$

چون $PQ \parallel AM$ طبق قضیه تالس داریم:

$$\frac{CQ}{MC} = \frac{PQ}{AM} \Rightarrow \frac{1 - \frac{a}{2}}{1} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{3} \left(1 - \frac{a}{2}\right) \Rightarrow a = \frac{2\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})}{4 - 3} = 4\sqrt{3} - 6$$

پاسخ سؤال ۲۱) طول ضلع AD را برابر a در نظر می‌گیریم بنابراین $AB = 3a$.
طبق رابطه فیثاغورس در مثلث ABD داریم:



$$BD^2 = AB^2 + AD^2 = a^2 + (3a)^2 = 10a^2 \Rightarrow BD = \sqrt{10}a$$

در مثلث ABD پاره خط AH ارتفاع وارد بر وتر است، بنابراین طبق روابط طولی داریم:

$$AD^2 = DH \cdot DB \Rightarrow a^2 = DH \cdot \sqrt{10}a \Rightarrow DH = \frac{a}{\sqrt{10}}$$

$$DF \parallel AB \Rightarrow \begin{cases} \hat{D}_1 = \hat{B}_1 \\ \hat{F}_1 = \hat{A}_1 \end{cases} \Rightarrow \triangle DFH \sim \triangle ABH$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{DF} = \frac{HB}{HD} \Rightarrow \frac{AB}{DF} = \frac{DB - DH}{HD}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{DF} = \frac{\sqrt{10}a - \frac{a}{\sqrt{10}}}{\frac{a}{\sqrt{10}}} = 9 \Rightarrow \text{چون } AB=DC \text{ بنابراین } DC, 9 \text{ برابر } DF \text{ است.}$$



فصل ۳

چند ضلعی ها

زیور

سازمانه اخبار و اطلاع رسانی دانشگاهی

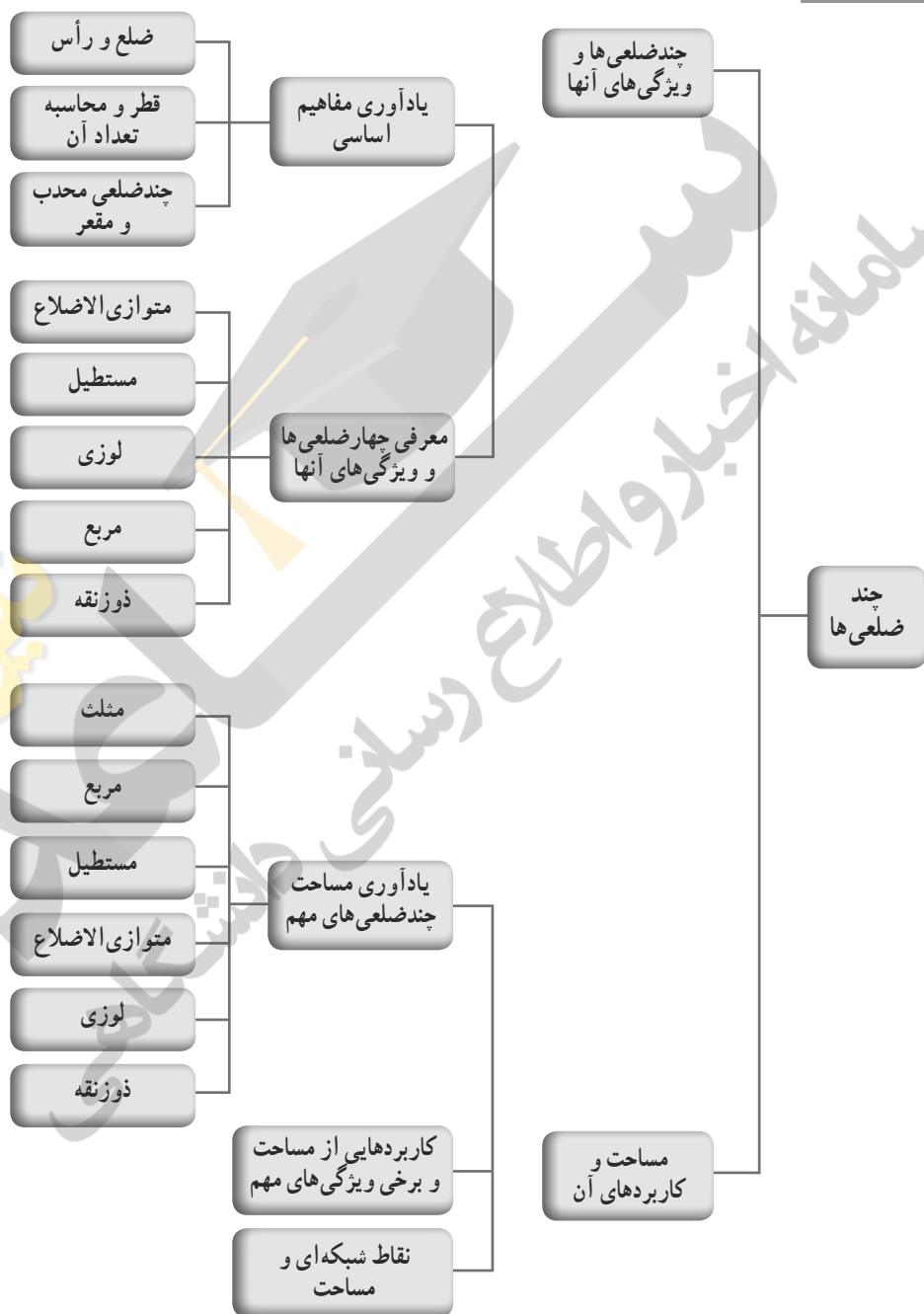
نگاه کلی به فصل

در دوره ابتدایی در مورد چندضلعی‌های معروف مانند مثلث، مربع، مستطیل، متوازی‌الاضلاع، لوزی و دوزنقه و برخی ویژگی‌ها و نیز روش محاسبه مساحت آنها مطالبی ارائه گردید. در دوره متوسطه اول در کتاب ریاضی هشتم در مورد این چندضلعی‌ها و چندضلعی‌های منتظم و ویژگی آنها و نیز تعداد قطرهای و اندازه زاویه‌های داخلی و خارجی آنها مطالبی گسترده‌تر از دوره ابتدایی ارائه گردید. در کتاب‌های ریاضی دوره متوسطه اول روش‌هایی برای تشخیص چندضلعی‌های محدب و مقعر مطرح گردید.

در ریاضی هشتم و نهم با استفاده از هم‌نهشتی مثلث‌ها برخی از ویژگی‌های این چندضلعی‌ها به صورت ضمنی اثبات گردید، هر چند که هدف، آموزش اثبات آن ویژگی‌ها نبوده است بلکه به کارگیری حالت‌های مختلف هم‌نهشتی مثلث‌ها بوده است. در این فصل در ابتدا مفاهیم پایه و اساسی مانند نقطه، پاره خط، ضلع و رأس یادآوری می‌شوند و سپس به تعریف چندضلعی، قطر و چندضلعی محدب و مقعر پرداخته شده است. سپس انواع چهارضلعی‌های مهم و برخی از ویژگی آنها معرفی، بررسی و اثبات می‌گردند.

در طی این مراحل سعی می‌شود دانش‌آموز به صورت فعالیت محور با مراحل و روش‌های استدلال در هندسه آشنا شده و روش‌های استدلال را بیاموزد. در قسمت دوم این فصل مساحت چندضلعی‌های مهم یادآوری می‌گردند و برخی از ویژگی‌های کاربرد در مساحت مورد بررسی و اثبات قرار می‌گیرند و سپس کاربردهایی از مساحت مطرح می‌گردد و در نهایت نقاط شبکه‌ای و روش محاسبه مساحت شکل‌های گوناگون در صفحه شبکه‌بندی شده مطرح و آموزش داده می‌شود.

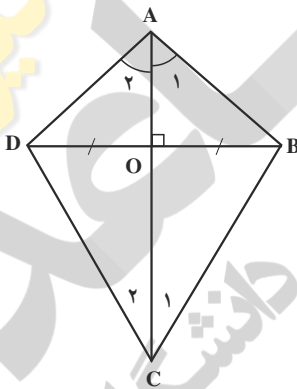
نقشه مفهومی



تصویر عنوانی

از دانش هندسه و شکل های هندسی به طور گسترده ای در معماری بناها، سازه ها و پل ها استفاده می شود. در کشور عزیزمان ایران، از دوران کهن تا معاصر، بناها و سازه های بسیاری وجود دارند که نشان دهنده به کارگیری وسیع هندسه در طراحی و ساخت آنها می باشد. پل طبیعت تهران یکی از بناهای شاخص و ممتاز ایران و جهان در دوران معاصر است که آشنایی و کاربرد هندسه - به خصوص چندضلعی ها - در طراحی و ساخت آن توسط مهندس نابغه زن ایرانی^۱ به صورت شایان توجهی به چشم می خورد. چندضلعی های گوناگون شامل مثلث، مربع، مستطیل، لوزی، متوازی الاضلاع و دوزنقه در قسمت های مختلف این سازه زیبا به وضوح قابل رویت و شناسایی است. برای استحکام بیشتر برخی از قسمت های این سازه از اتصال قطرهای این چندضلعی ها استفاده شده است. مساحت این پل ۷۰۰۰ متر مربع است که در ارتفاع ۴۰ متری از سطح زمین، با سه ستون و در سه طبقه، اولین پل صرفاً پیاده رو در ایران محسوب می شود.

دانستنی هایی برای معلم



کایت یا شبه لوزی: کایت چهارضلعی، شامل فقط دوجفت متمایز، از ضلع های مجاور با اندازه های برابر است. در واقع کایت چهارضلعی محدبی است که دارای دو قطر عمود بر هم است و فقط یکی از قطرهای منصف قطر دیگر می باشد. قطری که منصف قطر دیگر است محور تقارن کایت و همچنین نیمساز دو زاویه مقابل است. مساحت کایت مانند مساحت لوزی محاسبه می شود. در واقع کایت اجتماع دو مثلث متساوی الساقین است که قاعده های آنها مشترک و دو رأس دیگر دو مثلث در دو طرف خطی باشند که قاعده مشترک روی آن واقع است. سپس قاعده مشترک را حذف کرده باشیم.

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2, \quad \hat{C}_1 = \hat{C}_2$$

$$AC \perp BD, \quad OB = OD$$

$$AB = AD, \quad BC = DC$$

$$S_{ABCD} = \frac{AC \times BD}{2}$$

توصیه های آموزشی

به همکاران محترم توصیه می شود که برای تدریس هر قسمت، قبل از بیان نتیجه ها و قضیه ها، فعالیت های طراحی شده به صورت مرحله به مرحله پاسخ داده شود تا یک نظم منطقی برای رسیدن به نتایج و قضایا و اثبات برخی از ویژگی ها در ذهن دانش آموز شکل گیرد. در مواردی که به جز مراحل طراحی شده در فعالیت ها و نتیجه گیری ها مراحل یا روش دیگری وجود دارد که در کتاب به آن اشاره شده ولی توضیح کاملی ارائه نگردیده است و یا در کتاب به آن اشاره نشده است ولی می توان آن را ارائه داد به طوری که دانش آموز از طریق آن می تواند به همان نتایج دست یابد، بهتر است پس از تدریس و ارائه مراحل مطرح شده در کتاب و از طریق راهنمایی و هدایت دانش آموز را به سوی درک روش یا روش های دیگر هدایت نمود. این امر سبب می گردد که دانش آموز برای حل برخی از مسائل فقط به یک روش وابسته نگردد و بداند که می تواند برای حل برخی از مسائل دیدگاه های متفاوتی را اتخاذ نماید و نیز می تواند بین دو یا چند روش، روشی را که از نظر وی برای درک مفهوم مورد نظر راحت تر است، انتخاب نماید.

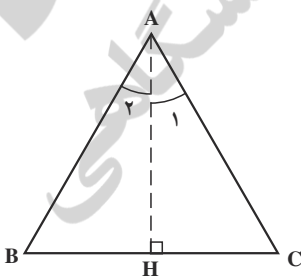
مسیرهایی برای توسعه: برای افزایش سطح درک دانش آموزان و برقرای ارتباط بیشتر دانش آموز و کتاب، استدلال های این فصل تا حد امکان به صورت کلامی مطرح شده اند. می توان در هر قسمت پس از ارائه آنچه در کتاب مطرح شده است از دانش آموزان بخواهیم تا سعی کنند آن را به زبان ریاضی و با نمادهای ریاضی بنویسند. مثلث های متساوی الاضلاع و متساوی الساقین دارای ویژگی هایی هستند که دانش آموز بسیاری از آنها را در سال های قبل مطالعه نموده و آموزش دیده است. از آنجایی که این مثلث ها و ویژگی های آنها و نیز برخی پاره خط ها در این مثلث ها مانند نیمساز و ارتفاع و میانه در حل بسیاری از مسائل و یا دستیابی به برخی از نتایج در این فصل استفاده می گردند، بنابراین ارائه مسائلی که به اثبات برخی از ویژگی های این مثلث ها منجر می شود قبل از شروع قسمت تعریف چهارضلعی های مهم می تواند در ارائه کار موجب ساده تر شدن امر آموزش گردد. مانند مسئله زیر:

– در مثلث متساوی الاضلاع ABC ، ارتفاع AH ارتفاع است.

ثابت کنید:

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \text{ (الف)}$$

$$BH = CH \text{ (ب)}$$



– در قسمت مساحت برای درک کاربرد مساحت و یا درک

بزرگی یا کوچکی مقدار محاسبه شده در برخی موارد می توان

از دانش آموز خواست تا مساحت محاسبه شده در یک شکل را با مساحت شکل هایی که با آنها آشنایی دارند مقایسه نمایند. به طور مثال می توان از دانش آموز خواست تا مساحت یک چندضلعی (به عنوان مثال

یک قسمت از یک سالن ورزشی که به شکل دوزنقه است) را با مساحت یک سرامیک یا موزاییک 3° در 3° مقایسه نماید و تعداد کاشی‌ها یا موزاییک مورد نیاز جهت کاشی کاری یا موزاییک نمودن آن سطح را محاسبه کند.

نمونه سؤالات ارزشیابی

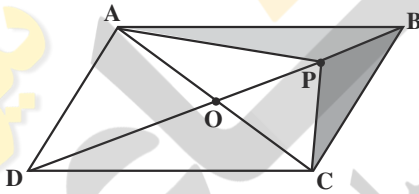
۱ الف) ثابت کنید مستطیلی که قطرهای آن بر هم عمود باشند، مربع است.

ب) ثابت کنید لوزی که دوزاویه مجاور آن هم‌نهشت باشند، مربع است.

۲ الف) ثابت کنید از تقاطع نیمسازهای درونی متوای الاضلاع که لوزی نباشد، یک مستطیل پدید می‌آید.

ب) اگر همه اضلاع متوازی الاضلاع برابر باشند چه اتفاقی رخ خواهد داد؟

۳ ثابت کنید هر دو رأس مقابل یک متوازی الاضلاع از قطر گذرنده از دو رأس مقابل دیگر، به یک فاصله‌اند.

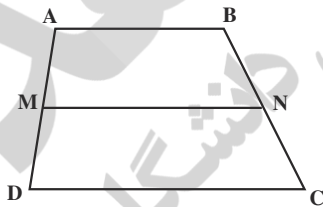


۴ اگر P نقطه‌ای دلخواه روی قطر BD از

متوازی الاضلاع ABCD باشد، ثابت کنید دو مثلث ABP و BPC هم‌مساحت هستند.

راهنمایی: قطر AC را رسم کرده و از ویژگی میانه در مساحت استفاده کنید. می‌توانید از مسئله (۳) نیز استفاده کنید.

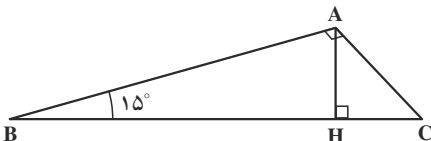
۵ در دوزنقه مقابل M وسط AD و N وسط BC است. ثابت کنید:



الف) $MN = \frac{AB + CD}{2}$ را
پاره خط میانگین می‌گویند

ب) $MN \parallel AB$ و $MN \parallel CD$

از A به C وصل کرده تلاقی پاره خط AC را با پاره خط MN نقطه K بنامید سپس از قضیه پاره خط میانگین در مثل استفاده کنید.

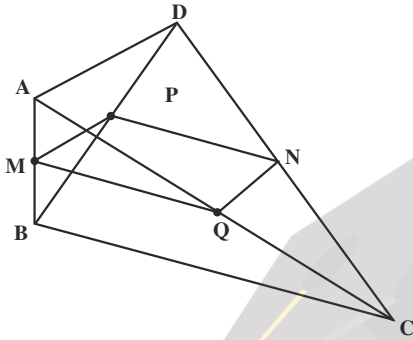


۶ ثابت کند اگر در یک مثلث قائم‌الزاویه یک

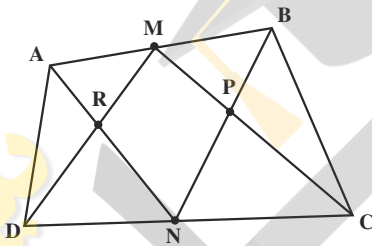
زاویه 15° یا 75° باشد، اندازه ارتفاع وارد بر وتر $\frac{1}{4}$

اندازه وتر است. ($AH = \frac{1}{4} BC$)

(راهنمایی: از رسم میانه وارد بر وتر و خواص مثلث متساوی الساقین و ضلع مقابل به زاویه 30° در مثلث قائم الزاویه استفاده نمایید)



۷ ثابت کنید در هر چهارضلعی دلخواهی مانند ABCD، اگر از به هم وصل نمودن وسط دو ضلع مقابل و وسط دو قطر آن یک چهارضلعی حاصل شود، آن چهارضلعی متوازی الاضلاع است.

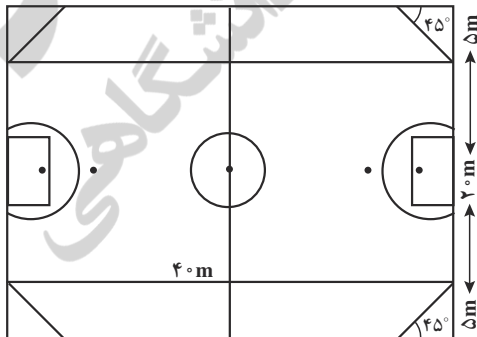


۸ در چهارضلعی محدب ABCD، M وسط AB و N وسط CD است.

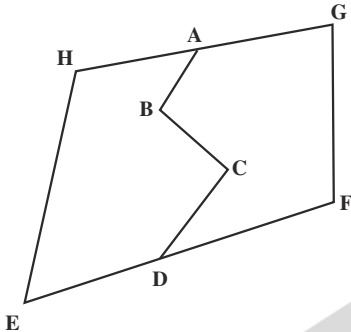
$$S_{\triangle PBC} + S_{\triangle ARD} = S_{MPNR} \quad \text{ثابت کنید:}$$

(راهنمایی: از M به N وصل نمایید)

۹ سالن فوتسالی از بالا به شکل زیر است. در چهار گوشه آن فضاهای مثلثی برای نصب پروژکتور در نظر گرفته شده است. می خواهند فضاهای مشخص شده (دوزنقه‌ها) برای تماشاچیان را به صورتی موزاییک کاری کنند که از دید دوربینی که در سقف ورزشگاه قرار دارد به دو رنگ آبی و قرمز دیده شود



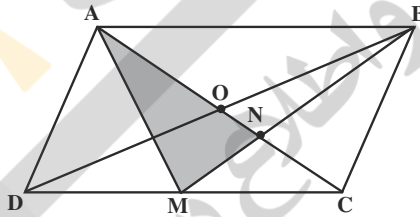
و دوربینی که در سمت تماشاچیان آبی و با قرمز قرار دارد، جایگاه تماشاچیان مقابل را جهت القای آرامش سبز رنگ نمایش دهد. اگر در هر جایگاه ۴ پله با ارتفاع 5° سانتی متر و عرض های برابر در نظر گرفته شود و از موزاییک‌هایی به ضلع 5cm و مربعی استفاده شود. تعداد موزاییک‌های قرمز و آبی و سبز را مشخص نمایید.



۱۰ زمین I و II به دو کشاورز تعلق دارند. هر یک از این دو کشاورز می‌خواهند برای استفاده بهتر مثلاً فنس‌کشی و استفاده از ماشین‌های کشاورزی، مرز مشترک ABCD بین خود را به یک مرز پاره خط مستقیم تبدیل کنند به طوری که مساحت هیچ کدام تغییر نکند. تعیین کنید این مرز چگونه باید رسم شود.

(راهنمایی: ابتدا از C خطی موازی EF رسم نمایید و پاره خط AC و خط موازی با آن را از نقطه B رسم کنید و ...)

۱۱ در متوازی‌الاضلاع ABCD، M وسط ضلع CD است. و قطر AC پاره خط BM را در N قطع می‌کند. مساحت مثلث AMN چه کسری از مساحت متوازی‌الاضلاع ABCD است؟ (یا مساحت متوازی‌الاضلاع چند برابر مساحت مثلث AMN است؟)



پاسخ برخی از سؤالات ارزشیابی

پاسخ سؤال ۷:

$$\left. \begin{aligned} \text{ABC در مثلث } \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AQ}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow MQ \parallel BC \\ \text{DBC در مثلث } \Rightarrow \frac{DN}{DC} = \frac{DP}{DB} = \frac{1}{2} \Rightarrow PN \parallel BC \end{aligned} \right\} \Rightarrow MQ \parallel PN$$

و به صورت مشابه با استفاده از عکس قضیه تالس در مثلث‌های ABD و ACD می‌توان نتیجه گرفت

که $MP \parallel NQ$

پاسخ سؤال ۱۱: قطر BD را رسم می‌کنیم با استفاده از ویژگی (۳) در مساحت، $S_{AMN} = S_{BNC}$. پاره خط‌های BM و CO (O نقطه تلاقی دو قطر) دو میانه مثلث BDC می‌باشند در نتیجه،

$$S_{AMN} = S_{BNC} = \frac{1}{3} S(BCD) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{6} S_{ABCD}$$

کج فهمی‌ها و اشتباهات رایج

- برخی از کج فهمی‌ها و اشتباهاتی که دانش آموز می‌تواند در این فصل با آنها روبه‌رو شود عبارت‌اند از:
- ۱ دانش آموز چهارضلعی‌ها و بسیاری از خواص آنها را در سنوات گذشته خوانده است، پس ممکن است در حل برخی مسائل مربوط به چهارضلعی‌ها با استفاده از دانسته‌های پیشین فرض‌هایی را در نظر بگیرد که هنوز برای آنها استدلالی ارائه نکرده است.
 - ۲ هر چهار ضلعی که همه اضلاع آن با هم برابر است لوزی است که اشتباهاً مربع در نظر گرفته می‌شود.
 - ۳ هر چهارضلعی که قطرهای آن بر هم عمود است الزاماً لوزی نیست که دانش‌آموزان همیشه آن را لوزی در نظر می‌گیرند.
 - ۴ دانش‌آموز مفهوم ارتفاع، میانه و نیمساز را درک نکرده است و آنها را با هم اشتباه می‌گیرد و با فرض‌هایی ناصحیح به حل مسائل می‌پردازد.
 - ۵ در محاسبه مساحت، به واحد اندازه‌گیری اضلاع و پاره‌خط‌ها و تبدیل واحدها دقت نمی‌شود.

معرفی منابع برای معلمان

- ۱ کتاب هندسه متوسطه، مبانی و مفهوم‌ها، نوشته محمود نصیری انتشارات مبتکران
- ۲ دایرةالمعارف هندسه، نوشته محمد هاشم رستمی جلد، انتشارات مدرسه وابسته به سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش.

چند ضلعی ها و ویژگی هایی از آنها

درس اول

اهداف درس اول

- ۱ یادآوری رأس، ضلع و قطر و اضلاع مجاور و مقابل و زاویه های مجاور (اجزای چندضلعی)
- ۲ آشنایی با مفهوم چندضلعی و تشخیص آن
- ۳ محاسبه تعداد قطرهای یک n ضلعی
- ۴ تشخیص چندضلعی های محدب و مقعر
- ۵ تشخیص چهارضلعی های مهم و تعریف آنها
- ۶ آشنایی با برخی از ویژگی های چهارضلعی های مهم
- ۷ تشخیص چهارضلعی با استفاده از برخی از ویژگی های آن
- ۸ آشنایی با برخی از روش های استدلال برای درک برخی ویژگی های چهارضلعی ها
- ۹ آشنایی با نتیجه گیری منطقی در استدلال های هندسی
- ۱۰ استفاده از استدلال های معتبر و قابل اعتماد برای اثبات برخی از ویژگی های چهارضلعی ها.

روش تدریس درس اول

در ابتدای این درس مفهوم پاره خط و نقاط انتهایی آن یادآوری می گردد. دانش آموزان در کتاب ریاضی پایه هشتم از متوسطه اول تعریف ساده ای از چندضلعی را خوانده اند. در این قسمت چندضلعی به شکل دقیق تری تعریف می شود و برای درک بیشتر این تعریف چند مثال با حالت های مختلف برای جلوگیری از اشتباهات رایج و کج فهمی دانش آموزان ارائه می گردد. سپس مفاهیمی مانند ضلع، رأس، اضلاع مجاور و زاویه های مجاور و n ضلعی یادآوری می گردد. سپس تعریف قطر و تعدادی سؤال مطرح می گردد که دانش آموز با پاسخ به این سؤالات و مرحله به مرحله به صورت فعالیت محور به سمت دستیابی به فرمول محاسبه تعداد قطرهای یک n ضلعی هدایت می گردد. در کار در کلاس این قسمت تعداد پاره خط های بین

n نقطه‌ای که هیچ سه‌تای آنها روی یک خط نباشد مطرح و رابطه بین تعداد اضلاع و تعداد قطرها و تعداد پاره‌خط‌های بین این n نقطه (n رأس چندضلعی) بررسی می‌گردد و رابطه زیر به دست می‌آید.

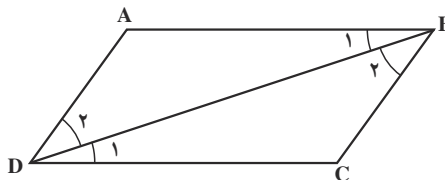
$$\text{تعداد اضلاع} + \text{تعداد قطرها} = \text{تعداد پاره‌خط‌ها}$$

دانش آموز در پایه‌های قبلی با مفهوم چندضلعی‌های محدب و مقعر آشنا شده‌اند. در این قسمت تعریف مجّددی از چندضلعی محدب و مقعر با روشی دیگر ارائه می‌گردد. در ادامه این مبحث با یادآوری اضلاع مقابل و غیرمجاور با یادآوری تعریف چندضلعی‌های مهم پرداخته می‌شود. دانش آموز از دوران ابتدایی با این چهارضلعی‌ها آشنا شده است و برخی از ویژگی‌های آنها را نیز در دوران سه ساله متوسطه اول آموخته است. در کار در کلاس این قسمت هدف این است که دانش آموز به صورت توضیحی، مانند آنچه در قسمت پ این سؤال ارائه شده است، هر قسمت را توضیح دهد. اما برای توسعه سطح دانش و آگاهی دانش آموزان می‌توان از دانش آموزان خواست تا علاوه بر توضیح کلامی و فارسی نویسی، هر قسمت را مانند آنچه در کتاب ریاضی نهم دیده‌اند، هر قسمت را با عبارات‌های ریاضی و به صورت استدلال استنتاجی (بدون معرفی نام استدلال) و اثبات ریاضی بنویسند.

در ادامه تعدادی از ویژگی‌های متوازی‌الاضلاع به صورت قضیه و عکس قضیه مطرح می‌شوند که برای درک و فهم هرچه بیشتر این قضایا و اثبات آنها فعالیت‌هایی طراحی شده است که دانش آموز به صورت مرحله به مرحله، با پاسخ به پرسش‌هایی که قبل از هر قضیه یا عکس قضیه به صورتی هدفمند طراحی شده‌اند به نتیجه مطلوب یعنی دریافت مفهوم و مطلب هر قضیه یا عکس آن، خواهد رسید.

در فعالیت ۱، در متوازی‌الاضلاع از هم‌نهشتی دو مثلث به حالت (ز ض ز) و استفاده از قضیه خطوط موازی و مورب که در کتاب ریاضی پایه هشتم ارائه شده است، مطرح می‌گردد. در کار در کلاس بعد از فعالیت ۱، از هم‌نهشتی مثلث‌ها و عکس قضیه خطوط موازی می‌توان به موازی بودن اضلاع روبه‌رو در چهارضلعی پی برد، یعنی:

$$\triangle ABD \cong \triangle CDB \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \xrightarrow[\text{خطوط موازی}]{\text{طبق عکس قضیه}} AB \parallel CD \\ \hat{B}_2 = \hat{D}_2 \xrightarrow[\text{خطوط موازی}]{\text{طبق عکس قضیه}} DA \parallel BC \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{چهارضلعی } ABCD \text{ که اضلاع} \\ \text{مقابل آن دوه‌دو با هم موازی} \\ \text{هستند، متوازی‌الاضلاع است.} \end{array} \right\}$$



در فعالیت ۲، از قضیه خطوط موازی و خط مورب ($\hat{B}_2 = \hat{C}$) و نیز زاویه‌های مکمل ($\hat{B}_1 + \hat{B}_2 = 180^\circ$) استفاده می‌شود و با ارائه یک سری پرسش‌های متوالی قضیه ۲ به صورت نتیجه این فعالیت مطرح می‌شود و سپس با استفاده مجدد از خطوط موازی و زاویه‌های مکمل عکس این قضیه ارائه می‌گردد. قضیه ۳ نیز می‌تواند دقیقاً مانند عبارت بالای آن به صورت مقابل اثبات گردد.

$$\left. \begin{array}{l} \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \\ \hat{B} + \hat{A} = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{A} \Rightarrow \hat{C} = \hat{A}$$

و عکس قضیه ۳ نیز به صورت زیر اثبات می‌گردد.

$$\begin{array}{l} \text{فرض} \\ \hat{A} = \hat{C} \\ \hat{B} = \hat{D} \end{array} \quad \underbrace{\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ}_{\text{دانشه‌های قبلی}} \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{A} + \hat{B} = 360^\circ \Rightarrow 2\hat{A} + 2\hat{B} = 360^\circ$$

$$\begin{array}{l} \hat{A} = \hat{C} \\ \hat{B} = \hat{D} \end{array} \quad \Rightarrow 2(\hat{A} + \hat{B}) = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A} + \hat{B} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$$

بنابراین دو زاویه مجاور مکمل یکدیگرند و به همین صورت ثابت می‌شود که $\hat{C} + \hat{D} = 180^\circ$ است. در فعالیت ۳ دو مثلث به حالت (ض ض ز) هم‌نهشت هستند و مجدداً دانش‌آموز برای رسیدن به نتیجه فعالیت یعنی قضیه ۴ مرحله به مرحله راهنمایی شده است. در فعالیت ۴ دو مثلث به حالت (ض ض ض) هم‌نهشت هستند که با انجام این فعالیت و کامل نمودن جاهای خالی به نتیجه مطلوب (عکس قضیه ۴) خواهد رسید.

فعالیت ۵ برای رسیدن به نتیجه‌ای که در ادامه آن آورده شده است، طراحی شده است. حالت هم‌نهشتی مثلث‌های مورد نظر (ض ض ض) می‌باشد. ولی برای رسیدن به این نتیجه دانش‌آموز می‌تواند هر کدام از حالت‌های (ض ض ض) و یا (ض ض ز) را برای هم‌نهشتی مثلث‌ها مطرح نماید. برای توسعه بیشتر می‌توان این مسئله را با هر سه روش برای دانش‌آموزان مطرح نمود و یا از دانش‌آموزان بخواهیم که با توجه به فرض‌های مسئله، روش دیگری را برای هم‌نهشتی مثلث‌ها و رسیدن به نتیجه مطلوب ارائه دهند.

در قسمت ویژگی‌هایی از مستطیل و لوزی ابتدا از دانش‌آموزان می‌خواهیم با توجه به معلومات قبلی، ویژگی‌های خاص مستطیل و مربع را مطرح نمایند که باعث می‌شود این چهارضلعی‌ها از متوازی‌الاضلاع قابل شناسایی باشند. مانند برابری قطرها و زاویه‌های قائمه، که در ادامه این ویژگی‌ها به صورت پاسخ و پرسش‌های متوالی مطرح می‌گردند و برای توسعه بیشتر مطالب در این قسمت می‌توان هر کدام را به صورت جداگانه مطرح و استدلال نمود.

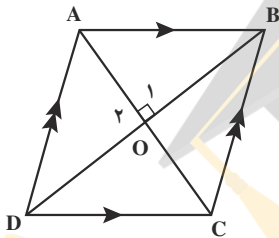
فعالیت ۶ یکی از فعالیت‌های مهم و پرکاربرد است که با پاسخ مرحله به مرحله به پرسش‌های آن، نتیجه

مهم مطلوب ارائه می گردد. در عکس ویژگی با توجه به اینکه $AD=BC$ است و قطر ها منصف یکدیگرند پس چهار ضلعی $ABDC$ متوازی الاضلاعی از نوع مستطیل است. بنابراین زاویه A قائمه می باشد.

ویژگی هایی که فقط در لوزی و مربع برقرار هستند و باعث تشخیص آنها از متوازی الاضلاع و مستطیل می شوند عبارت اند از برابری اضلاع و عمود منصف بودن قطر های آنها.

برای استدلال آوردن جهت اثبات ویژگی های لوزی استفاده از ویژگی های مثلث متساوی الساقین بسیار مؤثر است و می توان قبل از این قسمت جهت یادآوری از دانش آموزان پرسیده و یا برای آنها توضیح داده شود. ویژگی های مثلث متساوی الساقین که در این قسمت مد نظر است عبارت است از اینکه، در این مثلث ارتفاع، میانه و نیمساز زاویه رأس روی یک خط واقع اند.

سؤال ۱ کار در کلاس :



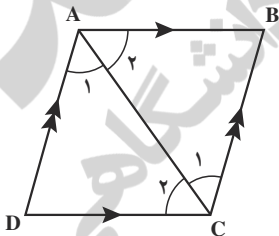
$$\left. \begin{array}{l} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 = 90^\circ \text{ فرض} \\ OA = OC \text{ مشترک} \\ OB = OD \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle OAB \cong \triangle OAD \xrightarrow{\text{تساوی اجزا}} \left. \begin{array}{l} \text{فرض } AB = CD \\ \text{فرض } AD = BC \\ AB = AD \end{array} \right\} \Rightarrow AB = BC = CD = AD$$

بنابراین

چهار ضلعی $ABCD$ که دارای دو قطر عمود بر هم و چهار ضلع برابر است، لوزی می باشد.

سؤال ۲ کار در کلاس : فرض می کنیم قطر AC فقط نیمساز

زاویه A باشد پس :



$$\left. \begin{array}{l} AB = CD \\ AD = BC \\ AC = AC \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle ADC \xrightarrow{\text{تساوی اجزا}} \left. \begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \text{ فرض سؤال} \\ \hat{A}_1 = \hat{C}_2 \text{ فرض متوازی الاضلاع} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \Rightarrow \triangle ADC : \text{متساوی الساقین} : AD = CD \\ \hat{A}_2 = \hat{C}_2 \Rightarrow \triangle ABC : \text{متساوی الساقین} : AB = BC \end{array} \right\}$$

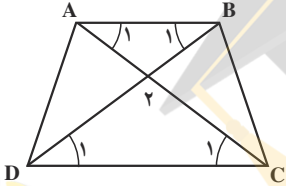
$$AB = CD \text{ فرض متوازی الاضلاع}$$

در نتیجه $AB=BC=CD=AD$ بنابراین متوازی الاضلاعی که دارای چهار ضلع برابر باشد لوزی می باشد. دانش آموز می تواند این استدلال ها را به صورت کلامی نیز بنویسد. هدف از این کار در کلاس دست ورزی و آوردن استدلال معتبر و قابل اعتماد برای اثبات برخی از ویژگی های لوزی می باشد.

سپس دوزنقه با بیانی متفاوت از متوازی الاضلاع تعریف می شود و سپس اجزای دوزنقه شامل قاعده ها و ساق ها معرفی می گردند سپس دوزنقه متساوی الساقین و دوزنقه قائم الزاویه مطرح و معرفی می گردند.

در فعالیت ۷ به اثبات برابری زاویه های مجاور به یک قاعده در دوزنقه متساوی الساقین پرداخته می شود و سپس این مطلب به صورت نتیجه فعالیت مطرح می گردد و در ادامه مجدداً با استفاده از عکس روش بیان شده به نتیجه ای برعکس نتیجه قبلی خواهد رسید و سپس می توان به روش زیر ثابت نمود که در هر دوزنقه متساوی الساقین قطرها اندازه های مساوی دارند.

دو مثلث ACD و BCD را در نظر می گیریم :



فرض $BC = AD$

(ض ز ض)

فرض $\hat{C} = \hat{D}$

$DC = DC$

$\Rightarrow \triangle ACD \cong \triangle BCD$

$\Rightarrow AC = BD \rightarrow$ قطرها با هم مساوی اند

و برای عکس آن ابتدا دو ارتفاع AH' و BH متناظر را رسم می کنیم و سپس :

(و ض)

$\left. \begin{array}{l} AC = BD \\ AH' = BH \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle BHD \cong \triangle AH'C \Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{D}_1$

$DC = DC$

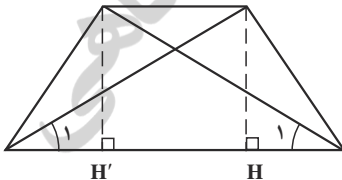
$AC = BD$

(ض ز ض)

$\Rightarrow \triangle ADC \cong \triangle BDC \Rightarrow AD = BC$

$\hat{D} = \hat{C} \Rightarrow$

دوزنقه متساوی الساقین است



مساحت و کاربردهای آن

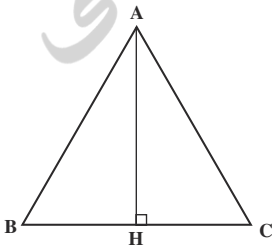
درس دوم

اهداف درس دوم

- ۱ یادآوری روش محاسبه مساحت چندضلعی ها شامل مثلث، مربع و مستطیل و
- ۲ آشنایی با روش محاسبه مساحت چهارضلعی های دارای دو قطر عمود برهم .
- ۳ آشنایی با برخی ویژگی ها و نکات در مقایسه مساحت دو یا چند مثلث و یا چهارضلعی .
- ۴ استفاده از ویژگی ها و نکات و شکل های هم مساحت برای محاسبه مساحت برخی شکل ها و حل مسائل .
- ۵ استفاده از مساحت جهت استدلال برای اثبات برخی از ویژگی ها و نکات .
- ۶ آشنایی با نقاط و چندضلعی های شبکه ای .
- ۷ آشنایی با روش محاسبه چندضلعی های شبکه ای .
- ۸ آشنایی با فرمول پیک برای محاسبه مساحت چندضلعی های شبکه ای و شکل های نامنظم هندسی

روش تدریس درس دوم

درس دوم با یادآوری روش محاسبه مساحت مثلث و چهارضلعی های مطرح شده در درس اول شامل مربع، مستطیل و متوازی الاضلاع و لوزی و دوزنقه آغاز می شود. دانش آموز در دوره ابتدایی و دوره متوسطه اول با این مطالب آشنا شده است. کار در کلاس این صفحه نیز به نوعی یادآوری مطالبی است که دانش آموز در پایه نهم آن را خوانده است که قسمت اول آن مجدداً استفاده از هم نهستی مثلث ها در اثبات برخی از ویژگی هاست. مانند :



$$\left. \begin{array}{l} AB = AC \\ \hat{B} = \hat{C} = 60^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABH \cong \triangle ACH$$

در مثلث متساوی الاضلاع ارتفاع همان میانه است $\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} BH = CH \rightarrow \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \rightarrow \end{array} \right.$
 در مثلث متساوی الاضلاع ارتفاع همان نیمساز است.

– و سپس با استفاده از قضیه فیثاغورث رابطه $AH = \frac{\sqrt{3}}{4}a$ و قراردادن آن در فرمول مساحت مثلث رابطه $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ به راحتی به دست می آید.
در فعالیت اول این درس داریم :

$$\left. \begin{aligned} S_{ADB} &= \frac{1}{2}BD \times AH \\ S_{DBC} &= \frac{1}{2}BD \times CH \end{aligned} \right\} \Rightarrow S_{ABCD} = S_{ADB} + S_{DBC} = \frac{1}{2}BD \times AH + \frac{1}{2}BD \times CH =$$

$$= \frac{1}{2}BD(AH + CH) = \frac{1}{2}BD \times AC = \text{نصف حاصل ضرب قطرها}$$

و نتیجه مطلوب برای تأکید در کادر رنگی زیر فعالیت مطرح می گردد.

– قسمت کاربردهایی از مساحت با یادآوری دو ویژگی که در فصل دوم (قضیه تالس) مطرح شده بود آغاز می گردد و کار در کلاس زیر آن نیز به نوعی دست ورزی برای استفاده از این ویژگی ها برای اثبات برابری مساحت های دو مثلث ایجاد شده با رسم یکی از میانه های هر مثلث دلخواه می باشد. برای حل این کار در کلاس کافی است ارتفاع AH وارد بر ضلع BC را رسم کنیم. AH ارتفاع هر دو مثلث ABM و ACM است و چون $BM = CM$ است پس دو مثلث دارای قاعده ها و ارتفاع های برابر هستند پس مساحت های برابری دارند. برای هر نقطه دلخواه مانند F روی میانه AM نیز می توان به همین شیوه استدلال نمود.
– فعالیت دوم این درس با استفاده از عکس قضیه تالس و ویژگی های متوازی الاضلاع که در فصل دوم و نیز در درس قبلی بیان شده اند به ارائه یک مطلب از کاربردهای مساحت می پردازد. می توان از روش زیر استفاده نمود :

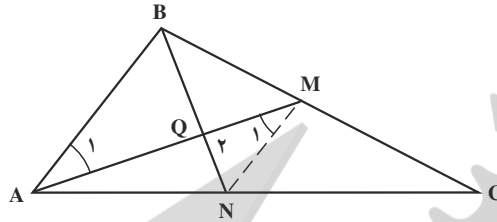
$$\frac{AP}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{1}{2} \xrightarrow[\text{قضیه تالس}]{\text{طبق عکس}} PN \parallel BC$$

و به همین شیوه می توان ثابت نمود که $PM \parallel AC$ و $MN \parallel AB$ است.

– بنابراین چهارضلعی های $APMN$ و $BPNM$ و $PNCM$ متوازی الاضلاع هستند و در درس گذشته و سال های قبل دیدیم که قطر متوازی الاضلاع آن را به دو مثلث هم نهشت تقسیم می کند. بنابراین با انجام این فعالیت نتیجه متعاقب آن به راحتی قابل درک خواهد شد.

– فعالیت سوم این درس با استفاده از ویژگی میانه ها و استفاده از قضیه تالس با پرسش های متوالی و توسعه سطح آگاهی ها و اطلاعات قبلی دانش آموز به ارائه مطلبی مهم می پردازد که لازم است چرای مرحله به مرحله این فعالیت برای دانش آموزان توضیح داده شود تا دانش آموز به جای حفظ و به خاطر سپاری ویژگی، آن را درک

نماید. روش اول به آسانی با پیگیری فعالیت قابل درک است و روش دوم به صورت زیر می باشد.



$$\frac{CM}{CB} = \frac{CN}{CA} = \frac{1}{2} \Rightarrow MN \parallel BC \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{MN}{AB} = \frac{1}{2} \\ \text{مورب } AM \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{M}_1 = \hat{A}_1 \\ \hat{G}_1 = \hat{G}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle CMN \cong \triangle ABG \Rightarrow \frac{GM}{AG} = \frac{GN}{BG} = \frac{MN}{AB} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{GM}{AM} = \frac{GN}{BN} = \frac{1}{3}$$

در مورد میانه وارد بر ضلع AB نیز می توان به همین شیوه عمل نمود.

و بعد از نتیجه گیری بیان شده، دانش آموز با استفاده از آنچه در کار در کلاس اول این درس آموخته است و با یک نام گذاری ساده x و y و z و مساوی قرار دادن مساحت های دو مثلث هم نهشت به این نتیجه خواهد رسید که وقتی میانه های وارد بر اضلاع هر مثلث دلخواهی را رسم کند مثلث به ۶ مثلث با مساحت های برابر تقسیم می شود. یعنی ۶ مثلث ایجاد شده، هم مساحت هستند.

— در ویژگی ۳ با استفاده از این نکته که فاصله بین دو خط موازی همیشه ثابت است می توان دو ارتفاع

AH و BH' را رسم نمود به طوری که :

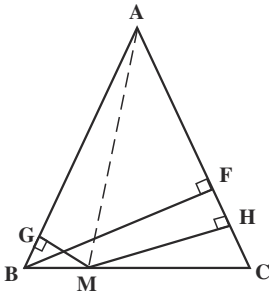
$$AH = BH' \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} S_{ADC} = \frac{1}{2} DC \times AH \Rightarrow S_{AOD} = S_{ADC} - S_{DOC} \\ S_{BDC} = \frac{1}{2} DC \times BH' \Rightarrow S_{BOC} = S_{BDC} - S_{DOC} \end{array} \right.$$

در نتیجه چون $S_{ADC} = S_{BDC}$ پس $S_{ADC} - S_{DOC} = S_{BDC} - S_{DOC}$ بنابراین $S_{AOD} = S_{BOC}$

و به همین شکل می توان مسئله دو مزرعه I و II را حل نمود به طوری که :

$$S_{AFC} = S_{ABC} \Rightarrow S_{AFC} - S_{AOC} = S_{ABC} - S_{AOC} \Rightarrow S_{OFC} = S_{OAB}$$

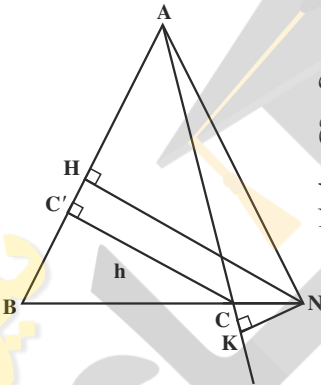
قسمت اول فعالیت چهارم این درس به روش زیر قابل توضیح می باشد.



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \times BF \quad S_{AMB} = \frac{1}{2} AB \times MG = \frac{1}{2} AC \times MG$$

$$S_{AMC} = \frac{1}{2} AC \times MH \rightarrow S_{ABC} = S_{AMB} + S_{AMC} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} AC \times BF = \frac{1}{2} AC \times (MG + MH) \Rightarrow BF = MG + MH$$

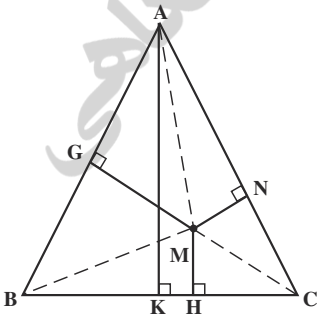


– پس می توان نتیجه گرفت که مجموع فاصله های هر نقطه روی قاعده مثلث متساوی الساقین از دو ساق برابر است با اندازه ارتفاع وارد بر ساق. در قسمت دوم این فعالیت با استفاده از شکل روبه رو می خواهیم ثابت کنیم که $|NH - NK| = h$ ابتدا رأس A را به نقطه N وصل می کنیم و سپس داریم :

$$S_{ANB} = S_{ABC} + S_{ANC} \Rightarrow S_{ABC} = S_{ANB} - S_{ANC}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} AB \times NH &= \frac{1}{2} AB \times h + \frac{1}{2} AC \times NK \\ AB &= AC \end{aligned} \right\} \Rightarrow NH = h + NK \Rightarrow |NH - NK| = h$$

در فعالیت پنجم همان طور که بیان شده است با اتصال نقطه M به سه رأس مثلث، سه مثلث ایجاد می گردد که جمع مساحت آنها برابر با مساحت کل مثلث است پس : $AB = BC = AC$ فرض



$$\left. \begin{aligned} S_{AMB} &= \frac{1}{2} AB \times MG \\ S_{AMC} &= \frac{1}{2} AC \times MN \\ S_{BMC} &= \frac{1}{2} BC \times MH \end{aligned} \right\} \Rightarrow S_{AMB} + S_{AMC} + S_{BMC} = S_{ABC}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} AB \times MG + \frac{1}{4} AC \times MN + \frac{1}{4} BC \times MH = \frac{1}{4} BC \times AK$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} AB(MG + MN + MH) = \frac{1}{4} AB \times AK \Rightarrow MG + MN + MH = AK$$

و نتیجه زیر فعالیت حاصل می‌گردد. البته در ابتدای همین درس در کار در کلاس اول یادآوری نمودیم

که $AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ و در ادامه این فعالیت سؤالی برای دست‌ورزی مطرح شده است که در آن:

$$AK = 2 + 4 + 6 = 12 \Rightarrow \frac{a\sqrt{3}}{2} = 12 \Rightarrow a = \frac{24}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{24\sqrt{3}}{3} = 8\sqrt{3}$$

در نقاط شبکه‌ای و مساحت ابتدا تعریفی از نقاط شبکه‌ای و چندضلعی‌های شبکه‌ای ارائه می‌گردد و سپس نقاط مرزی و نقاط درونی شبکه‌ای معرفی می‌گردند و سپس در فعالیت ششم با توجه به تعریف چندضلعی که در ابتدای این فصل ارائه گردید حداقل نقاط مرزی (یعنی ۳) و حداقل نقاط درونی (یعنی صفر) مورد سؤال قرار می‌گیرد و سپس مجموعه جدول‌ها و سؤالاتی جهت محاسبه مساحت چندضلعی‌های شبکه‌ای با ترتیب نقاط درونی صفر و یک و دو و ... به صورت مرحله به مرحله طراحی شده‌اند که دانش‌آموز با پاسخ به آنها می‌تواند به رابطه $S = \frac{b}{2} - 1 + i$ دست یابد که از این رابطه به طور گسترده‌ای برای محاسبه شکل‌های نامنظم هندسی استفاده می‌شود.

در کار در کلاس اول که زیر همین فعالیت قرار دارد دانش‌آموز با محاسبه مساحت هر چندضلعی با دو روش (استفاده از فرمول بیک b و c و استفاده از فرمول محاسبه مساحت چندضلعی‌ها) عملاً به دست‌ورزی استفاده از این رابطه می‌پردازد و به برابری مساحت محاسبه شده در هر دو روش پی خواهد برد و در کار در کلاس آخر هدف این است که علاوه بر دست‌ورزی، دانش‌آموز به کاربرد این رابطه برای محاسبه مساحت شکل‌های نامنظم پی‌برد و بفهمد که هرچه واحدها را کوچک‌تر در نظر بگیرد تعریف دقیق‌تری محاسبه می‌شود.

حل تمرین های فصل سوم (درس اول)

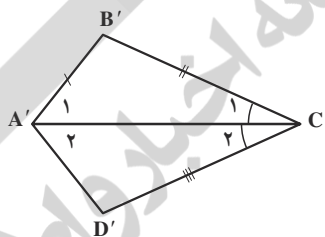
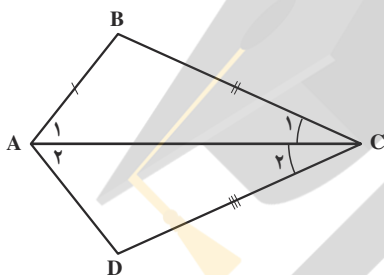
تمرین ص ۶۳

۱

$$\frac{n(n-3)}{2} = n \rightarrow n(n-3) = 2n \rightarrow n^2 - 3n - 2n = 0$$

$$\rightarrow n^2 - 5n = 0 \rightarrow n(n-5) = 0 \rightarrow \begin{cases} n = 0 & \text{غقی} \\ n - 5 = 0 \rightarrow n = 5 \end{cases} \rightarrow \text{در پنج ضلعی}$$

۲ الف



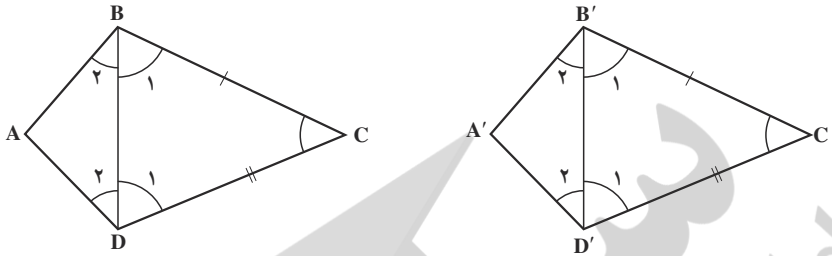
$$\textcircled{1} \begin{cases} \hat{C} = \hat{C}' \\ \downarrow \\ \hat{C}_1 + \hat{C}_2 = \hat{C}'_1 + \hat{C}'_2 \xrightarrow{\hat{C}_1 = \hat{C}'_1} \hat{C}_2 = \hat{C}'_2 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} AB = A'B' \\ \hat{B} = \hat{B}' \\ BC = B'C' \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle A'B'C' \xrightarrow[\text{متناظر}]{\text{تساوی اجزای}} \left\{ \begin{array}{l} AC = A'C' \\ \hat{A}_1 = \hat{A}'_1 \rightarrow \\ \hat{C}_1 = \hat{C}'_1 \quad \textcircled{1} \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} CD = C'D' \\ AC = A'C' \\ \hat{C}_2 = \hat{C}'_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ACD \cong \triangle A'C'D' \Rightarrow$$

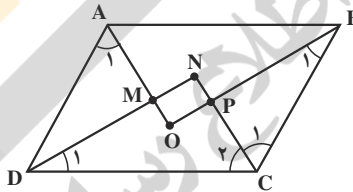
$$\xrightarrow[\text{متناظر}]{\text{تساوی اجزای}} \left\{ \begin{array}{l} AD = A'D' \\ \hat{D} = \hat{D}' \\ \hat{A}_2 = \hat{A}'_2 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{A}'_1 \\ \hat{A}_2 = \hat{A}'_2 \\ \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{A}'_1 + \hat{A}'_2 \Rightarrow \boxed{\hat{A} = \hat{A}'} \end{array} \right.$$

(ب)



قطرهای BD و $B'D'$ را در دو چهار ضلعی رسم می کنیم. دو مثلث BDC و $B'D'C'$ بنابر، ض-ض-هم نهشت پس $\angle B_1 = \angle B'_1$ و $\angle D_1 = \angle D'_1$ چون $\angle D = \angle D'$ و اندازه های مساوی دارند پس $\angle B_2 = \angle B'_2$ و $\angle D_2 = \angle D'_2$ چرا؟ در نتیجه، دو مثلث ABD و $A'B'D'$ بنابر، ض-ض-هم نهشت اند و در نتیجه $\angle A = \angle A'$ و $AD = A'D'$ ، $AB = A'B'$.

۳



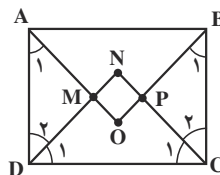
$$\hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{C}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ \Rightarrow \hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 90^\circ \Rightarrow \hat{BPC} : \hat{P} = 90^\circ$$

و به صورت مشابه ثابت می شود که $\hat{M} = 90^\circ$ است.

$$\hat{C} + \hat{D} = 180^\circ \Rightarrow \frac{\hat{C}}{2} + \frac{\hat{D}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ \Rightarrow \hat{D}_1 + \hat{C}_2 = 90^\circ \Rightarrow \hat{DNC} : \hat{N} = 90^\circ$$

و به صورت مشابه ثابت می شود که $\hat{O} = 90^\circ$ است.

بنابراین در چهار ضلعی $MNPO$ همه زاویه ها قائمه هستند پس این چهار ضلعی یک مستطیل است.
- طبق قسمت بالا می توان ثابت کرد که در مستطیل مقابل $\hat{M} = \hat{N} = \hat{P} = \hat{O} = 90^\circ$ است.



$$\left. \begin{array}{l} AD = BC \\ \hat{A}_1 = \hat{B}_1 = 45^\circ \\ \hat{D}_2 = \hat{C}_2 = 45^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{متساوی الساقین} \\ \hat{D}_1 + \hat{C}_1 = 45^\circ \rightarrow \Delta DNC \Rightarrow DN = NC \\ \Delta ADM \cong \Delta BPC \rightarrow DM = PC \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} DN - DM = NC - PC \Rightarrow \\ \Rightarrow \boxed{MN = NP} \quad (1) \end{array}$$

دو مثلث AOB و DNC نیز به حالت (زض ز) باهم، هم نهشت هستند پس $DN = AO$ می باشد و از طرفی مثلث AMD متساوی الساقین است پس $AM = DM$ پس می توان نوشت:

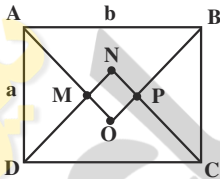
$$AO - AM = DN - DM \Rightarrow \boxed{OM = MN} \quad (2)$$

(۳)

و به صورت مشابه می توان ثابت نمود که $PN = PO$ است.

– بنابراین طبق ۱ و ۲ و ۳ می توان گفت چهارضلعی MNPO چهار زاویه قائمه دارد و چهار ضلع آن باهم برابر است پس این چهارضلعی یک مربع است.

۲ مثلث های AMD و AOB قائم الزاویه و متساوی الساقین هستند پس:

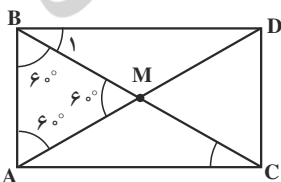


$$\left. \begin{array}{l} AM = DM \Rightarrow AM^2 + DM^2 = AD^2 \Rightarrow 2AM^2 = a^2 \Rightarrow AM = \frac{\sqrt{2}}{2}a \\ AO = BO \Rightarrow AO^2 + BO^2 = AB^2 \Rightarrow 2AO^2 = b^2 \Rightarrow AO = \frac{\sqrt{2}}{2}b \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$OM = AO - AM \Rightarrow OM = \frac{\sqrt{2}}{2}b - \frac{\sqrt{2}}{2}a \Rightarrow OM = \frac{\sqrt{2}}{2}(b-a)$$

بنابراین اندازه اضلاع مربع حاصل از برخورد نیمسازهای درونی مستطیل به طول b و عرض a برابر

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(b-a) \text{ است با}$$



۵ روش اول: پاره خط AM را به اندازه خودش امتداد

می دهیم تا نقطه D مشخص شود چون $AM = MD$ و $BM = MC$

بنابراین چهارضلعی ABDC که قطرهاش یکدیگر را نصف می کنند

متوازی الاضلاع است در متوازی الاضلاع مذکور اگر BC خط

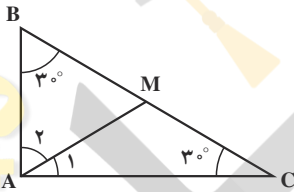
مورب باشد، $\hat{B}_1 = \hat{C}_1 = 3^\circ$ و $\hat{B}_2 = \hat{C}_2 = 6^\circ$. بنابراین $\hat{B} = \hat{C} = 9^\circ$ و متوازی الاضلاعی که یک زاویه 9° درجه داشته باشد مستطیل است. بنابراین در مستطیل $ABDC$ قطرهای باهم برابر و منصف یکدیگرند یعنی $AD = BC$ و $BM = MC = AM = MD$ و در مثلث متساوی الاضلاع ABM داریم $AB = BM = AM$ (مثلث ABM دارای سه زاویه 6° می‌باشد) پس:

$$BC = BM + MC \xrightarrow{BM=MC} BC = 2BM \Rightarrow BM = \frac{BC}{2}$$

در هر مثلث قائم الزاویه، ضلع مقابل به زاویه 3° ، نصف وتر است.

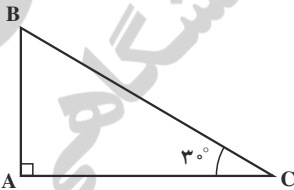
$$\left. \begin{array}{l} BM = \frac{BC}{2} \\ AP = BM \end{array} \right\} \Rightarrow AB = \frac{BC}{2}$$

روش دوم:



$$\left. \begin{array}{l} \text{میانۀ وارد بر وتر} \\ \text{نصف وتر است.} \end{array} \right\} \Rightarrow AM = MC \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \hat{A}_1 = 3^\circ \\ \hat{A}_2 = 6^\circ \Rightarrow \triangle ABM \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow AB = BM = \frac{BC}{2}$$

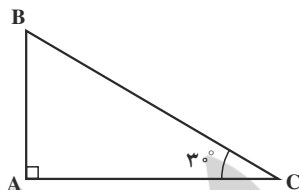


روش سوم: قرینه مثلث ABC را نسبت به ضلع AC رسم می‌کنیم. در مثلث $BB'C$ چون $\hat{B} - \hat{B}' = 6^\circ$ پس $\hat{C} = 6^\circ$ بنابراین مثلث $BB'C$ متساوی الاضلاع است. یعنی $BB' = BC$ و در مثلث متساوی الاضلاع ارتفاع CA میانه BB' نیز هست

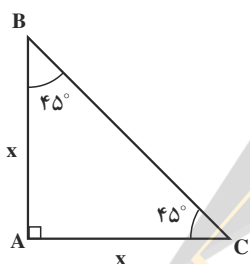
$$\text{پس } AB = \frac{BB'}{2} = \frac{BC}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{رابطه فیثاغورس } BC^2 &= AC^2 + AB^2 \Rightarrow AC^2 = BC^2 - AB^2 = BC^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2 = \\ &= BC^2 - \frac{BC^2}{4} = \frac{3BC^2}{4} \end{aligned}$$

$$AC = \sqrt{\frac{3BC^2}{4}} \Rightarrow AC = \frac{\sqrt{3}}{2} BC$$



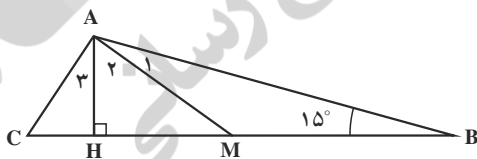
مثلث قائم الزاویه‌ای که یکی از زاویه‌های آن 45° باشد، قائم الزاویه متساوی الساقین است پس:



$$x^2 + x^2 = BC^2 \Rightarrow 2x^2 = BC^2 \Rightarrow x^2 = \frac{BC^2}{2} \Rightarrow x = \frac{BC}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2} BC$$

با توجه به پاسخ سؤال ۵ می‌دانیم در مثلث قائم الزاویه میانه وارد بر وتر نصف وتر است یعنی

$$AM = \frac{1}{2} BC$$

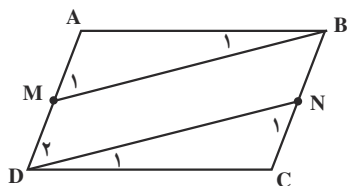


$$AM = BM \Rightarrow \hat{A}_1 = 15^\circ$$

ضلع مقابل به زاویه 30°

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = 90^\circ \\ \hat{B} = 15^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{C} = 75^\circ \Rightarrow \hat{A}_2 = 15^\circ \Rightarrow \hat{A}_2 = 60^\circ \Rightarrow \hat{M}_1 = 30^\circ \Rightarrow AH = \frac{1}{2} AM$$

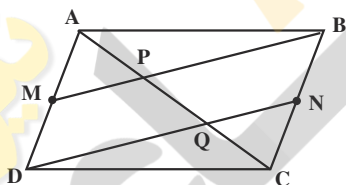
$$\left. \begin{array}{l} AH = \frac{1}{2} AM \\ AM = \frac{1}{2} BC \end{array} \right\} \Rightarrow AH = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} BC \right) \Rightarrow AH = \frac{1}{4} BC$$



$$AD = BC \rightarrow \frac{1}{2} AD = \frac{1}{2} BC \Rightarrow$$

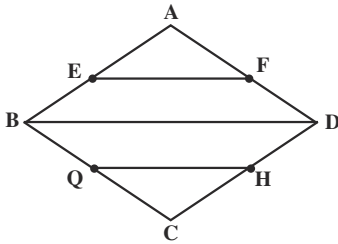
$$\left. \begin{array}{l} AB = DC \\ \hat{A} = \hat{C} \\ AM = CN \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{(ض ز ض)} \\ ABM \cong CND \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{N}_1 \\ \text{خط مورب } DN \xrightarrow{AD \parallel BC} \hat{N}_1 = \hat{D}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{D}_2$$

بنابراین طبق عکس قضیه خطوط موازی نتیجه می گیریم که: $MB \parallel DN$



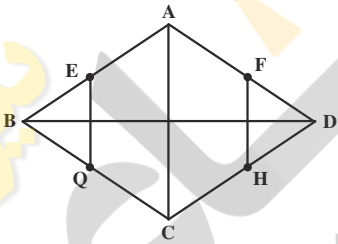
$$\left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow QN \parallel BP \xrightarrow[\text{در مثلث BPC}]{\text{طبق قضیه تالس}} \frac{CN}{NB} = \frac{QC}{PQ} = 1 \Rightarrow PQ = QC \\ \Rightarrow MP \parallel DQ \xrightarrow[\text{در مثلث ADQ}]{\text{طبق قضیه تالس}} \frac{AM}{MD} = \frac{AP}{PQ} = 1 \Rightarrow AP = PQ \end{array} \right.$$

در نتیجه $AP = PQ = QC$



۸ چهارضلعی دلخواه ABCD را در نظر می‌گیریم و نقاط E و F و G و H را وسط اضلاع آن اختیار می‌کنیم.

$$\left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} AB \text{ وسط } E \\ AD \text{ وسط } F \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AD} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{طبق عکس قضیه تالس}} EF \parallel BD \\ \left. \begin{array}{l} CD \text{ وسط } H \\ BC \text{ وسط } G \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{CH}{CD} = \frac{CG}{CB} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{طبق عکس قضیه تالس}} GH \parallel BD \end{array} \right\} \Rightarrow EF \parallel GH$$



و به‌طور مشابه و با در نظر گرفتن شکل مقابل می‌توان ثابت نمود که $EG \parallel FH$ بنابراین در چهارضلعی EFHG اضلاع مقابل باهم موازی‌اند. پس چهارضلعی EFHG متوازی‌الاضلاع است.

– اگر دو قطر چهارضلعی ABCD هم‌اندازه باشند، چهارضلعی حاصل لوزی است.

– اگر دو قطر چهارضلعی ABCD برهم عمود باشند، چهارضلعی حاصل مستطیل است.

– محیط متوازی‌الاضلاع حاصل برابر است با مجموع اندازه قطرهای چهارضلعی اصلی چون طبق

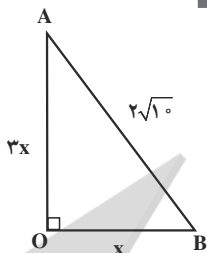
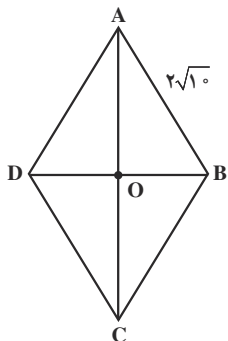
قضیه تالس و عکس آن می‌توان نوشت :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{EG}{AC} = \frac{1}{2} = \frac{FH}{AC} \Rightarrow EG + FH = AC \\ \frac{EF}{BD} = \frac{1}{2} = \frac{GH}{BD} \Rightarrow EF + GH = BD \end{array} \right\} \Rightarrow EG + FH + EF + GH = AC = BD$$

حل تمرین های فصل سوم (درس دوم)

تمرین ص ۷۲

۱

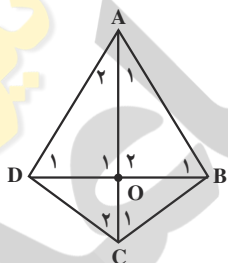


$$\frac{BD}{AC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}BD}{\frac{1}{2}AC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{OB}{OA} = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$x^2 + (3x)^2 = (2\sqrt{10})^2 \Rightarrow x^2 + 9x^2 = 40 \Rightarrow 10x^2 = 40 \Rightarrow x^2 = \frac{40}{10} = 4 \Rightarrow x = 2$$

$$OA = 3x = 3 \times 2 = 6 \rightarrow AC = 12 \text{ و } BD = 2 \times 2 = 4 \Rightarrow S = \frac{AC \times BD}{2} = \frac{12 \times 4}{2} = 24$$

۲



$$\left. \begin{array}{l} AB = AD \\ BC = DC \\ AC = AC \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{(ض ض ض)}} \triangle ABC \cong \triangle ADC \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ \hat{C}_1 = \hat{C}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{AC نیمساز } \hat{A} \text{ و } \hat{C} \text{ است}$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ AD = AB \rightarrow \text{متساوی الساقین است} \triangle ABD \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \\ AB = AD \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{(ز ض ز)}} \triangle OAB \cong \triangle OAD \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \Rightarrow \hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 180^\circ \Rightarrow 2\hat{O}_1 = 180^\circ \\ \Rightarrow \hat{O}_2 = \hat{O}_1 = 90^\circ \\ OB = OD \Rightarrow \text{AC عمود منصف BD است} \end{array} \right.$$

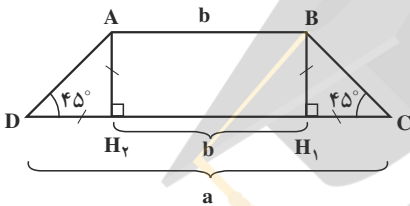
پس $\hat{O}_1 = \hat{O}_2 = \hat{O}_3 = \hat{O}_4 = 90^\circ$ یعنی دو قطر AC و BD بر هم عموداند. پس :

$$S = \frac{AC \times BD}{2} = \frac{6 \times 8}{2} = 24$$

چون در هر دو متوازی الاضلاع قاعده‌ها برابر AB و ارتفاع‌ها برابر با فاصله دو خط موازی است

بنابراین

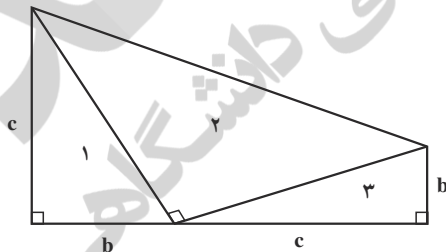
$$S_1 = S_2 = AB \times h = S$$



$$AD = BC \text{ و } AH_1 = AH_2 = CH_1 = DH_1 = \frac{a-b}{2}$$

$$S = \frac{(DC + AB)AH_1}{2} = \frac{(a+b)(\frac{a-b}{2})}{2} = \frac{\frac{1}{2}(a+b)(a-b)}{2}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{4}(a^2 - b^2)$$

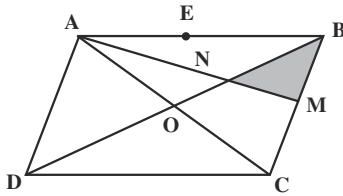


$$S_* = S_{\Delta_1} + S_{\Delta_2} + S_{\Delta_3} = \frac{1}{2}bc + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}(a^2 + 2bc)$$

$$S_* = \frac{1}{2}(b+c)(b+c) = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 + 2bc)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(a^2 + 2bc) = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 + 2bc) \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow$$

قضیه فیثاغورس

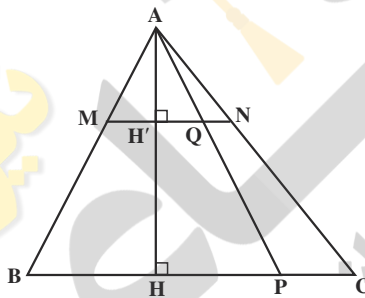


۶ از C به N وصل کرده و ادامه می دهیم تا AB را در E قطع کند. چون نقطه N محل همرسی میانه هاست پس:

$$\left. \begin{aligned} S_{\triangle BMN} &= \frac{1}{6} S_{\triangle ABC} \\ S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2} S_{ABCD} \end{aligned} \right\} \Rightarrow S_{\triangle BMN} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{12} S_{ABCD}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle BMN}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{12}$$

O میانه AC است
M میانه BC است.



$$\frac{AM}{BM} = \frac{1}{2} \xrightarrow[\text{مخرج}]{\text{ترکیب در}} \frac{AM}{AB} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{QN}{PC} = \frac{AH'}{AH} = \frac{MQ}{BP} = \frac{1}{3}$$

اگر $QN=x$ در نظر بگیریم آنگاه داریم: $AH'=x$ و $AH=3x$ و $PC=3x$

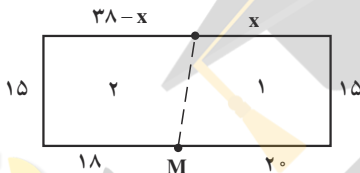
$$\frac{PC}{PB} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{QN}{MQ} = \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} QN = x \Rightarrow MQ = 3x \\ PC = 3x \Rightarrow PB = 9x \end{cases}$$

$$\frac{S_{\triangle AQN}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{1}{2} QN \cdot AH'}{\frac{1}{2} BC \cdot AH} = \frac{\frac{1}{2} x \cdot x}{\frac{1}{2} (3x + 9x) \cdot 3x} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}} \cancel{x}^2}{\cancel{\frac{1}{2}} \cancel{3}^2 \cancel{x}^2} = \frac{1}{36}$$

$$\left. \begin{aligned} S_{\triangle ABP} &= \frac{1}{2} BP \cdot AH = \frac{1}{2} 4x \cdot 3x = \frac{1}{2} (27x^2) \\ S_{\triangle AMQ} &= \frac{1}{2} MQ \cdot AH' = \frac{1}{2} 3x \cdot x = \frac{1}{2} (3x^2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow S_{MQPB} = S_{APB} - S_{AMQ}$$

$$\Rightarrow S_{MQPB} = \frac{1}{2} (27x^2) - \frac{1}{2} (3x^2) = \frac{1}{2} (24x^2)$$

$$\frac{S_{MQPB}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{1}{2} (24x^2)}{\frac{1}{2} (36x^2)} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$$



$$S_1 = \frac{1}{2} (20 + x) \times 15$$

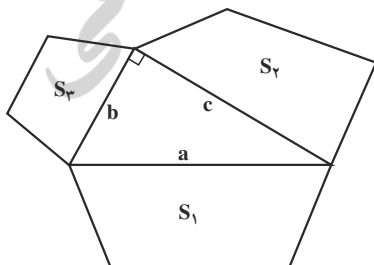
$$S_2 = \frac{1}{2} (-38 - x + 18) \times 15$$

$$S_1 = S_2 \Rightarrow \frac{1}{2} (300 + 15x) = \frac{1}{2} (840 - 15x)$$

$$\Rightarrow 300 + 15x = 840 - 15x \Rightarrow 15x + 15x = 840 - 300 = 540$$

$$\Rightarrow x = \frac{540}{30} = 18$$

۹ در هر مثلث قائم الزاویه رابطه فیثاغورث برقرار است یعنی داریم: $a^2 + b^2 = c^2$



فرض کنیم سه چندضلعی متشابه ساخته شده به مساحت‌های S_1 و S_2 و S_3 باشند. می‌دانیم نسبت مساحت دو چندضلعی متشابه برابر مجذور نسبت تشابه آن است

پس $\frac{S_2}{S_1} = \frac{b^2}{a^2}$ و $\frac{S_3}{S_1} = \frac{c^2}{a^2}$ در نتیجه،

فصل سوم: چند ضلعی ها ۷۳

$$\frac{S_r}{S_1} + \frac{S_r}{S_1} = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} \Rightarrow \frac{S_r + S_r}{S_1} = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = 1 \Rightarrow S_1 = S_r + S_r$$

$$S = \frac{b}{2} - 1 + i$$

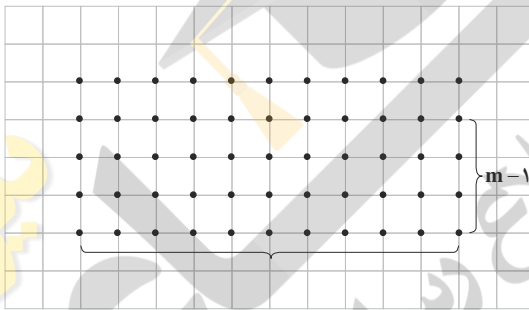
$$S = \frac{9}{2} - 1 + 13 = \frac{7}{2} + 13 \quad 10$$

$$S = \frac{5}{2} - 1 + 3 = \frac{3}{2} + 3$$

$$S = \frac{7}{2} + 13 - \frac{3}{2} - 3 = \frac{4}{2} + 10 = 2 + 10 = 12$$

= مساحت قسمت سایه زده شده

۱۱



اندازه طول مستطیل n واجد است
پس روی هر طول مستطیل $n+1$ نقطه
داریم، در عرض نیز همین گونه است یعنی
 $m+1$ نقطه روی هر عرض داریم اما دو
نقطه آن قبلاً در هر قسمت محاسبه شده
است پس $m-1$ نقطه روی عرض می ماند
در نتیجه تعداد نقاط مرزی مستطیل برابر
است با

اما برای محاسبه نقطه های درونی ستون اول و آخر را کنار می گذاریم
 $b = 2(n+1) + 2(m-1) = 2n + 2m$
 $n-1$ ستون داریم که روی هر یک $m-1$ نقطه است پس، $i = (n-1)(m-1)$ پس

$$S = \frac{b}{2} + i - 1 = \frac{2n + 2m}{2} + (n-1)(m-1) - 1 = n + m + mn - n - m + 1 - 1 = mn = S \text{ مستطیل}$$

۱۲

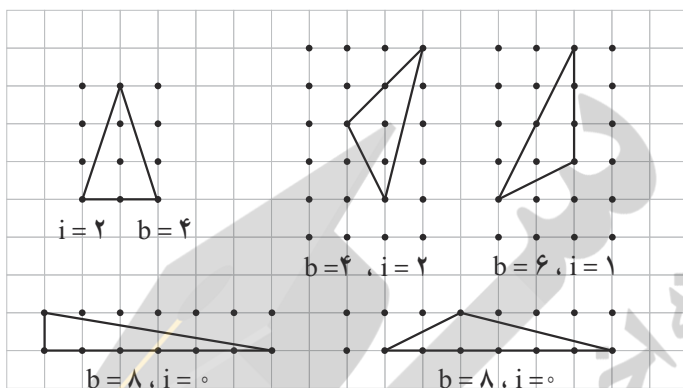
$$\frac{b}{2} + i - 1 = 3 \Rightarrow b + 2i = 8$$

پس $b \geq 3$ و $i \geq 0$ در نتیجه، $8 - b \geq 0$ بنابراین $3 \leq b \leq 8$ چون $b = 2(4-i)$ پس باید b زوج نیز
باشد در نتیجه b فقط می تواند سه مقدار ۸، ۶، ۴ را اختیار کند.

پس i نیز محاسبه می شود.

b	۴	۶	۸
i	۲	۱	۰

می‌توانیم تعدادی را رسم کنیم مثلاً سه ضلعی‌ها به صورت زیر می‌توانند باشند.



می‌توانید رأس بالا را روی هر یک از نقاط بالایی ضلع قرار دهید
وقتی نقاط مرزی بیشترین مقدار را دارد که $b=8$ و $i=0$ ، سه چهار ضلعی نظیر آن به صورت زیر است.



با تغییر دو نقطه بالایی می‌توانید دوزنقه‌های دیگری نیز رسم کنید.



فصل ۴

تجسم فضایی

نیز

سازمانه اخبار و اطلاع رسانی دانشگاهی

نگاه کلی به فصل

آشنایی با شکل‌های فضایی از کتاب ریاضی پنجم ابتدایی با طرح دستور محاسبه حجم مکعب مستطیل آغاز شده و دانش‌آموزان به تدریج نسبت به انواع شکل‌های فضایی هندسی مثل حجم‌های منشوری، حجم‌های کروی و حجم‌های هرمی شناخت پیدا کرده‌اند و دستور محاسبه مساحت جانبی و مساحت کل و حجم آنها را آموخته‌اند.

همچنین رابطه بین سطح و حجم و دوران حول محور سطح را که منجر به ساخته شدن یک حجم فضایی می‌گردد فرا گرفته‌اند، گسترده یک شکل فضایی را می‌شناسند و با تشخیص نماهای مختلف یک جسم هندسی آشنا هستند. در کتاب ریاضی پایه نهم دوره اول متوسطه تعریف کره، استوانه، هرم و مخروط بیان شده و دانش‌آموزان کمایش دستور محاسبه حجم و مساحت جانبی و مساحت کل این شکل‌ها را به صورت تجربی فرا گرفته‌اند. همچنین بحث گسترده شکل‌های فضایی مطرح شده و دوران حول محور در شکل‌های مختلف تکرار شده و حجم‌های ساخته شده توسط آن مورد بررسی قرار گرفته است. در پایان مبحث هندسه فضایی نیز بحث برش مقطعی شکل‌های فضایی مطرح گردیده است. در کتاب هندسه پایه دهم دوره دوم متوسطه، هندسه فضایی از مفاهیم تعریف نشده (نقطه، خط، صفحه) به عنوان مفاهیمی که ساختمان اصلی هندسه را می‌سازند آغاز شده و طرح مبحث حالت‌های مختلف دو خط، حالت‌های مختلف خط و صفحه و حالت‌های مختلف دو صفحه در فضا ادامه می‌یابد.

در ادامه آن مفهوم تعامد بررسی شده و مفهوم عمود بودن خط بر صفحه، و دو صفحه عمود بر هم مطرح گردیده است. در درس دوم این فصل، برای آشنایی دانش‌آموزان و همچنین تقویت دید فضایی آنها در مراحل بالاتر تحصیلی، به ویژه در دانشجویان رشته‌های فنی و مهندسی، مبحثی با عنوان تفکر تجسمی گنجانده شده است و هدف از آن تقویت تجسم فضایی در دانش‌آموزان می‌باشد.

این درس شامل سه قسمت است. در بخش اول دید از جهات مختلف و رسم نماهای مختلف یک شکل فضایی مطرح شده که دانش‌آموز از پایه هفتم با آن آشنا شده است.

در بخش دوم، برش زدن یک شکل فضایی توسط یک صفحه و سطح مقطع حاصل از این برش‌ها مطرح گردیده و تلاش شده که دانش‌آموزان ضمن تقویت تجسم فضایی بتوانند سطح مقطع حاصل از برش را حدس بزنند.

و در بخش پایانی نیز دوران حول محور و تشکیل شکل‌های فضایی با استفاده از دوران شکل‌های مسطح هندسی یادآوری گردیده است. دانش‌آموزان با این بحث در کتاب هفتم و نهم آشنا شده‌اند. و در این کتاب نیز تلاش شده با دوران شکل‌های هندسی خاصی مثل کره، نیمکره، مثلث، مستطیل و ... حول یک محور یا خط خاص شکل فضایی حاصل معرفی شود.

نقشه مفهومی



تصویر عنوانی

از قدیم در ساخت بناها از دانش هندسه استفاده شده است و با دیدن بناهای تاریخی می‌توان به میزان آگاهی و دانش ریاضی‌دانان و معماران ایرانی پی برد. تصویر عنوانی این فصل از کتاب، آرامگاه شیخ الرئیس بوعلی سینا است که در میانه میدانی به همین نام در شهر همدان واقع شده است. شهر همدان حدود ۵۰ سال است که به برج آرامگاه بوعلی، مزین شده است. این بنا ابتدا در زمان قاجاریه ساخته شد. طرح و نقشه بنای فعلی توسط «مهندس هوشنگ سیحون» به سبک معماری قرنیه که بوعلی سینا در آن می‌زیسته و از روی قدیمی‌ترین بنای تاریخ دار اسلامی یعنی برج گنبد قابوس در شهر گنبد کاووس اقتباس شده است. تصویر سمت چپ در تصویر عنوانی، نمای داخلی آرامگاه بوعلی است که به جهت ارتباط آن با درس اول تفکر تجسمی به آن اشاره شده است.

دانستنی‌هایی برای معلم

افلاطون معتقد است که «مطالعه ریاضیات دستگاه ذهنی را توسعه می‌دهد و به کار می‌اندازد که ارزش آن از هزار چشم بیشتر است، زیرا که درک حقیقت فقط از راه ریاضی میسر است.» توسعه آموزش علوم پایه، یک نیاز اساسی در زیرساخت‌های توسعه صنعتی و علوم کاربردی محسوب می‌شود. اشباع حس کنجکاوی جوانان و لذت اندیشه‌ورزی و نوآوری در این سنین سرمایه گران سنگی است که تعمیق آموزش علوم پایه و محض تأمین‌کننده مناسبی برای آن می‌باشد.

هندسه فضایی

بررسی روابط بین خط‌ها و صفحه‌ها و شکل‌های فضایی که از برخورد صفحه‌ها به وجود می‌آیند و نیز رویه‌هایی که از دوران خط‌ها یا کمان‌ها به وجود می‌آیند و همچنین رویه‌هایی که از حرکت خط‌ها پدید می‌آیند، به کمک مفاهیم اولیه یا تعریف شده‌ها، تعریف‌ها، اصل‌ها و قضیه‌ها در هندسه فضایی مطرح می‌شود.

— تعریف نشده‌ها یا مفاهیم‌های اولیه : مفاهیمی هستند که به علت فقدان معلومات کافی قابل تعریف نیستند. وجود عناصر نامعین در این مفاهیم یعنی عناصری که قابل تصور در ذهن نیستند از علل قابل تعریف نبودن آنهاست.

تعریف شده‌های مهم هندسه فضایی که اغلب آنها در هندسه مسطحه نیز تعریف ندارند عبارت‌اند از :

نقطه، خط، صفحه، شکل، مجموعه، سطح و فضا.

— اصل : گزاره‌ای است که درستی آن بدون اثبات پذیرفته شده است. اصول مهم هندسه فضایی که برخی از آنها در هندسه مسطحه نیز معتبر است عبارت‌اند از :

- ۱ از دو نقطه متمایز یک و تنها یک خط می‌گذرد و هر خط لااقل دارای دو نقطه است.
 - ۲ اگر دو نقطه از خطی در صفحه‌ای باشد، تمام آن خط در آن صفحه قرار خواهد داشت.
 - ۳ از سه نقطه که روی یک خط راست نباشند یک و تنها یک صفحه می‌گذرد.
 - ۴ لااقل سه نقطه وجود دارد که بر یک خط راست واقع نیستند.
 - ۵ حداقل ۴ نقطه وجود دارد که بر یک صفحه واقع نیستند.
 - ۶ اگر دو صفحه متمایز یک نقطه مشترک داشته باشند در یک خط راست مشترک خواهند بود.
- اصل پنجم اقلیدس : از هر نقطه فضا تنها یک خط موازی با خط مفروض می‌گذرد.
- نمایش صفحه : شکل‌های مختلف نمایش صفحه عبارت‌اند از صورت‌هایی که از اصول هندسه فضایی و تعریف دو خط موازی می‌توان نتیجه گرفت. این صورت‌ها به شرح زیر هستند :
- ۱ سه نقطه غیرواقع بر یک خط
 - ۲ یک خط و نقطه‌ای در خارج آن
 - ۳ دو خط متقاطع
 - ۴ دو خط موازی
- هندسه ترسیمی : هندسه ترسیمی عبارت است از نمایش یک نقطه، خط، سطح یا جسم با تصاویر دو بعدی از آن.
- وقتی ناظر مثلاً جسم را از روبه‌رو نگاه می‌کند باید تصویر آنچه را می‌بیند روی صفحه رسم کند. از روی این تصاویر دو بعدی می‌توان جسم سه بعدی را تصور کرد.
- هندسه ترسیمی یکی از شاخه‌های علم ریاضی است که به کمک قوانین آن می‌توان اجسام سه بعدی را به‌طور کامل و دقیق روی صفحه دو بعدی ترسیم کرد. پیشرفت هندسه ترسیمی مدیون اصولی است که توسط «گاسپارد مونژ» ملقب به پدر هندسه ترسیمی در رساله‌ای تحت عنوان «مروری بر هندسه ترسیمی» ارائه شده است که مبانی نقشه‌کشی صنعتی و اصول هندسه ترسیم را بنیان نهاد.
- هندسه ترسیمی نیازمند تجسم قوی و توانمند می‌باشد و از ضروری‌ترین اصولی است که باید فراگیر به آن تجهیز گردد. به گفته انیشتین : «تجسم از علم و دانش مهم‌تر است».
- یکی از ابزارهای مهم و مؤثر برای تقویت قدرت تجسم، هندسه ترسیمی است و به همین دلیل از مهم‌ترین مباحث آموزشی برای فراگیران می‌باشد.

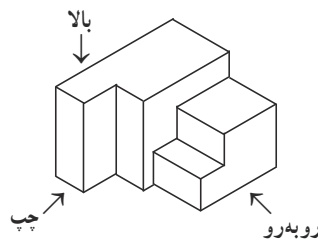
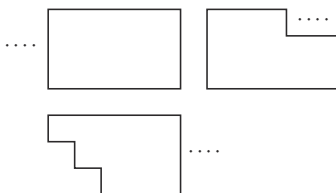
معرفی منابع برای معلمان

معلمین گرامی برای دانش‌افزایی در خصوص ترسیم‌های هندسی می‌توانند از کتاب‌های درسی رسم فنی مربوط به دانش‌آموزان فنی و حرفه‌ای کمک بگیرند.

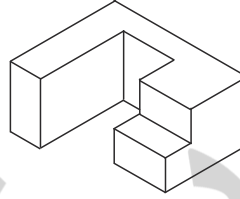
سوالات ارزشیابی

- ۱ صفحه P و نقطه O روی آن را در نظر بگیرید. خط d را طوری رسم می کنیم که از نقطه O بگذرد. کدام گزینه در مورد وضعیت خط d و صفحه p صحیح است؟
 الف) خط d بر صفحه P واقع است.
 ب) خط d و صفحه P موازی اند.
 ج) خط d و صفحه P متقاطع اند.
 د) خط d و صفحه P هم‌پوشان است.
- ۲ اگر دو صفحه متمایز P و P' در نقطه A مشترک باشند آن دو صفحه نسبت به هم چه وضعی دارند؟
 الف) P و P' متقاطع اند.
 ب) P و P' موازی اند.
 ج) P و P' منطبق اند.
 د) P و P' هم‌پوشان است.
- ۳ دو صفحه متمایز P و P' و خط d را که در هر دو صفحه فوق قرار دارد، در نظر بگیرید دو صفحه P و P' نسبت به هم چه وضعی دارند؟
 الف) منطبق اند
 ب) متقاطع اند
 ج) موازی اند
 د) هم‌پوشان است.
- ۴ دو خط d و d' با هم موازی اند. اگر صفحه P و خط d موازی باشند، کدام گزینه درست است؟
 الف) خط d' و صفحه P موازی اند
 ب) خط d' و صفحه P متقاطع اند
 ج) خط d' بر صفحه P عمود است.
 د) الف و ج صحیح است.
- ۵ خط d صفحه P را قطع نمی کند. گزینه صحیح کدام است؟
 الف) خط d بر صفحه P عمود است.
 ب) خط d بر صفحه P واقع است.
 ج) خط d و صفحه P موازی اند.
 د) ب و ج صحیح است.
- ۶ عبارت‌های زیر را کامل کنید.
 الف) اگر دو صفحه P و P' در نقطه A مشترک باشند نسبت به هم یا هستند.
 ب) خط d و صفحه P موازی هستند هرگاه
 ج) از نقطه O خارج صفحه P خط موازی با صفحه P می توان رسم کرد.
 د) از نقطه O خارج خط d صفحه موازی با خط d می توان رسم کرد.
- ۷ سه نمای بالا، روبه‌رو و چپ از جسم زیر رسم شده است. مشخص کنید هر تصویر مربوط به کدام

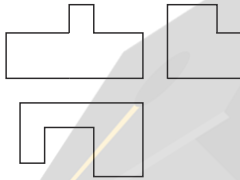
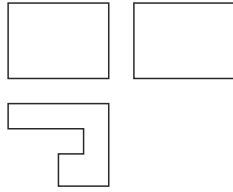
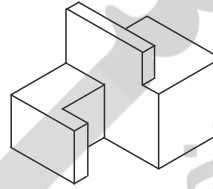
نماست؟
الف)



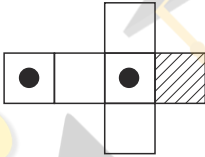
(ب)



(ج)



۸ کدام یک از مکعب‌های زیر مربوط به گسترده شکل روبه‌رو است؟



(د)



(ج)

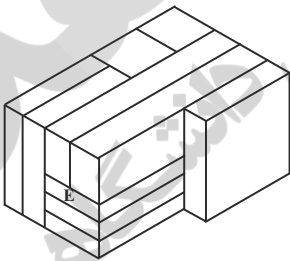


(ب)



(الف)

۹ مکعب E که در بین ده مکعب دیگر قرار گرفته با چند مکعب در تماس است؟



(ب) ۷

(الف) ۱

(د) ۵

(ج) ۶

۱۰ برای هر مورد توضیح دهید که چگونه به کمک دوران می‌توان آنها را تجسم کرد؟

(الف) مخروط ناقص

(ب) دو مخروط یکسان که از قاعده به هم چسبیده‌اند.

(ج) استوانه‌ای به شعاع قاعده ۱

(د) دو مخروط یکسان که از رأس به هم چسبیده‌اند.

خط، نقطه و صفحه

درس اول

اهداف درس اول

- ۱ آشنایی با نقطه، خط و صفحه و نحوه نمایش و نام گذاری هر کدام
- ۲ شناخت نقاط هم راستا، نقاطی که در یک صفحه هستند ولی در یک راستا نیستند و نقاطی که در یک صفحه نیستند.
- ۳ شناخت حالت های مختلف دو خط در صفحه و در فضا، همچنین حالت های مختلف خط و صفحه و دو صفحه.
- ۴ درک مفهوم تعامد و عمود بودن خط بر صفحه و دو صفحه عمود بر هم.

ابزار مورد نیاز :

- ۱ مداد و خط کش
- ۲ صفحه کتاب، میز، نیمکت و صفحه دیوار کلاس

روش تدریس درس اول

هندسه فضایی در این کتاب با مرور مفاهیم تعریف نشده شروع می شود و ضمن یادآوری مفهوم نقطه و خط و مفهوم صفحه، روش های نام گذاری خط و نقطه و صفحه یادآوری می شود. در کار در کلاس این صفحه با استفاده از بازی تپیس، مفهوم نقاط هم راستا، نقاطی که در یک صفحه هستند ولی هم راستا نیستند و نقاطی که در یک صفحه نیستند، معرفی می گردد و به طور شهودی اصول اولیه هندسه فضایی مطرح می شود.

سپس حالت های مختلف دو خط در صفحه به کمک شکل مطرح می شود. در ادامه حالت های مختلف دو خط در فضای حل فعالیت بیان می گردد. در کار در کلاس مربوط به این بخش مفاهیم اساسی خط و صفحه آمده است و به دانش آموز کمک می کند تا این مفاهیم را در صفحه و فضا مقایسه نموده و نتیجه گیری نماید.

در ادامه حالت های مختلف خط و صفحه به کمک شکل نمایش داده شده و از دانش آموزان خواسته

می‌شود که جملات مربوط به آن را کامل نمایند.

در کار در کلاس صفحه بعدی اصول اساسی مربوط به خط در صفحه و در فضا با شکل‌های مربوطه نشان داده شده و در هر مورد سؤالاتی مطرح می‌شود که پاسخگویی به این سؤال‌ها باعث درک بهتر این مفاهیم می‌شود.

توصیه می‌شود فعالیت‌ها و کار در کلاس‌ها به کمک تصاویری از دنیای واقعی برای درک بهتر شهودی مورد تأمل واقع شود.

در ادامه حالت‌های مختلف دو صفحه همراه با تصاویر مربوط بیان شده و از دانش آموز خواسته شده که جملات ناقص را کامل کند. کار در کلاس این بخش، حالت‌های مختلف دو خط، خط و صفحه، دو صفحه را در یک مکعب تکرار می‌کند تا یادگیری مطالب عمیق‌تر شود.

در ادامه بحث، تعامد تعریف شده و با استفاده از شکل مداد و کتاب عمود بودن خط بر صفحه مطرح می‌گردد و اصول اساسی عمود بودن خط بر صفحه به‌طور شهودی و با استفاده از شکل‌های مربوطه نشان داده شده است.

سپس دو صفحه عمود بر هم تعریف می‌شوند و در کار در کلاس مربوط به آن، مفهوم عمود بودن دو صفحه همراه با طرح سؤالاتی تکرار و تمرین شده است. مفهوم عمود بودن در حالت‌های مختلف دو خط و صفحه، یا دو صفحه و خط، خط و دو صفحه موازی و دو خط موازی که بر صفحه‌ای عمودند مرور می‌شود.

توصیه‌های آموزشی

□ در انجام فعالیت‌ها و کار در کلاس‌ها فضا و زمان کافی برای تأمل به دانش‌آموزان داده شود تا دانش مورد نیاز خود را شکل دهند.

□ در این کتاب تمرکز اصلی بر روی مفاهیم شهودی است. لذا از ورود به مباحث استدلالی اجتناب کنید.

□ در این کتاب پس از مرور پژوهش‌های متعدد و بررسی کتاب‌های درسی کشورهای مختلف، انطباق حالتی از توازی منظور نشده است. لذا انطباق و توازی به شکل دو مفهوم جدا مطرح شده‌اند. در این خصوص ذکر دو نکته ضروری است :

1 □ در حالتی که خط بر صفحه واقع است، از عبارت «انطباق» استفاده نمی‌شود. در عوض می‌نویسیم خط بر صفحه واقع است یا خط در صفحه قرار دارد.

2 □ در حالتی که دو خط یا دو صفحه بر هم منطبق می‌شوند، در واقع با هم یکی می‌شوند.

□ استفاده از مواد و کاغذ و ... در نمایش صفحه و خط برای کمک به درک شهودی است و نباید به این بدفهمی منجر شود که خط و صفحه محدود هستند یا صفحه دارای ضخامت است.

تفکر تجسمی

درس دوم

اهداف درس دوم

- ۱ درک مفهوم دید از جهات مختلف و رسم شکل با نماهای مختلف.
- ۲ آشنایی با برش‌های یک جسم فضایی و تجسم سطح مقطع ایجاد شده در آن.
- ۳ شناخت سطح مقطع‌های ایجاد شده در استوانه، کره، منشور و مخروط با برش‌های مختلف عمودی، افق و مایل.
- ۴ شناخت دوران حول محور و تجسم شکل ایجاد شده توسط آن

ابزار مورد نیاز :

- ۱ اجسام مختلف سه بعدی
- ۲ دست‌سازه‌های اسفنجی به شکل استوانه، کره، منشور و مخروط یا استفاده از میوه‌هایی با این اشکال

روش تدریس درس دوم

به دلیل تأکید سند برنامه درسی ملی بر تقویت انواع تفکر در دانش‌آموزان از جمله تفکر تجسمی، این درس به بیان مفهوم تفکر تجسمی اختصاص داده شده و در آن به سه مبحث ترسیم نماهای مختلف یک جسم هندسی، برش و دوران طول یک محور پرداخته شده است.

انسان‌ها برای بیان اندیشه‌های خود به دو روش عمل می‌کنند. یا مفهوم مورد نظر را در قالب کلمات در ذهن خود پردازش کرده و آن را بیان می‌کنند و یا به کمک بازی تصاویر در ذهن درباره موضوع مورد نظر خود فکر کرده و سپس آن را بیان می‌کنند. نوع دوم تفکر را تفکر تجسمی می‌نامیم.

توصیه می‌شود در تدریس این درس حتماً فعالیت‌ها در کلاس کار شود و به دانش‌آموزان فرصت کافی برای پردازش تصویر در ذهن داده شود.

در قسمت دوم فعالیت، پیدا کردن تعداد دقیق پرتقال‌ها و ورود به مباحث حجم هرم با الگوهای عددی

منظور نیست و تنها هدف این است که دانش آموز چینش پرتقال ها و چگونگی روند کاهش آن را در ذهن خود مجسم کند. در قسمت چهارم فعالیت، حتماً فرصتی برای رسم کروکی خانه تا مدرسه به دانش آموز داده شود و از آنان خواسته شود که در منزل یا کلاس درس طرحی از مسیر خانه تا مدرسه رسم کنند. در قسمت آخر این فعالیت در حالت فضایی اشاره به هرم مربع القاعده صحیح است و علاوه بر آن این شکل می تواند متعلق به مکعب مستطیلی باشد که قطرهای آن رسم شده است.

در ادامه این بحث قبل از ورود به بحث نماها و دیدن دقیق تر یک جسم از ابعاد مختلف به کمک تصاویر ارائه شده در بالای صفحه به هنر هنرمندان، عکاسان و نقاشانی اشاره می شود که تنها با داشتن نگاهی متفاوت به دنیای اطراف توانسته اند اثری ارزشمند از خود به جای بگذارند.

توصیه های آموزشی

□ دقت شود که در این درس به علت زمینه سازی برای رشته های فنی و مهندسی نظیر معماری، الفبای اولیه ترسیم فنی قرار است آموزش داده شود. لذا در رسم نماهای مختلف، لحاظ کردن ارتفاع های مختلف و رسم خطوط داخلی نما، مدنظر نیست. فقط در شکل هایی که به صورت شطرنجی اندازه های دقیق داده شده انتظار می رود که در رسم نماهای مختلف هم خطوط شطرنجی ترسیم شود.

□ برای دروس برش و دوران از همکاران انتظار می رود که تا حد ممکن از دست سازه های هندسی و اجسام دنیای واقعی نظیر میوه ها و ... در آموزش کمک بگیرند.

□ به دانش آموزان یادآوری کنید که مهارت حل مسئله مستلزم صرف زمان و داشتن مداومت بر کار است و حل هر مسئله می تواند در حل مسائل مشابه دیگر به او کمک کند.

□ تفکر تجسمی در دانش آموزان مختلف دارای سطوح متفاوت است. اما با تکرار و تمرین می توان این مهارت را در همه تقویت کرد.

□ در این کتاب دادن نماهای مختلف یک شکل هندسی و سپس خواستن رسم آن جسم هندسی یا تجسم آن مدنظر نیست و تنها به شیوه عکس عمل می شود. بدین معنا که شکل هندسی داده شده و نماهای مختلف خواسته می شود.

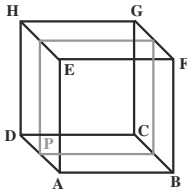
□ مجله ریاضی صفحه ۹۱ صرفاً برای تعمیق مبحث تجسم هندسی است و مجلات ریاضی در ارزشیابی استفاده نمی شوند.

□ در این درس هدف تقویت تفکر تجسمی است. لذا سعی شده حتی الامکان از طرح سؤالات محاسباتی اجتناب شود. لطفاً در ارزشیابی ها به این موضوع دقت شود.

حل بعضی از تمرین‌های فصل چهارم

تمرین صفحه ۸۱

- ۲ الف) یا با خط دوم موازی است یا خط دوم بر آن واقع است.
 ب) یا با خط دیگر موازی است یا هر دو خط بر آن صفحه قرار دارند.
 ج) متقاطع.



- ۳ الف) - می‌تواند با آن موازی باشد مثل صفحه P و دو خط HG و FB
 - خط دیگر می‌تواند بر آن واقع باشد. مثل صفحه EFBA که با HG موازی است و FB بر آن قرار دارد.

- می‌تواند متقاطع باشد مثل HEAD.

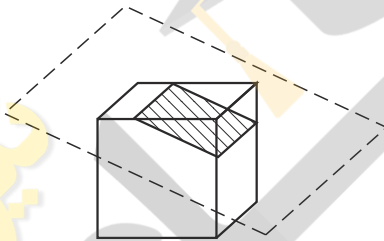
- ب) می‌تواند متقاطع باشد مثل صفحه HGFE و می‌تواند موازی باشد مثل

صفحه DHGC

- ج) - می‌تواند شامل خط دیگر باشد مثل صفحه EHGF

- می‌تواند موازی باشد مثل صفحه ADCB

- می‌تواند مطابق شکل هر دو را قطع کند



حل تمرین‌های فصل

تمرین صفحه ۸۴ درس اول

۱ الف) دو صفحه

ب) نقاط B و C و E

ج) نقاط A و B و C و D

د) متناظر - متقاطع

۲ الف) خط‌های d_1 و d_2 صفحه P را قطع کرده‌اند (در نقطه C) - یا شامل هر دو خط است و یا یکی

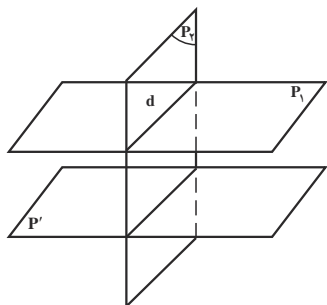
از خطوط صفحه را قطع کرده و خط دیگر در صفحه واقع است.

ب) d_1 در صفحه P واقع است و خط d_2 صفحه P را در نقطه C قطع کرده است.

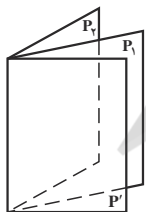
ج) دو خط متقاطع d_1 و d_2 در صفحه P واقع‌اند.

د) دو خط متقاطع d_1 و d_2 در صفحه P واقع‌اند.

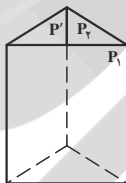
۳ الف) متقاطع



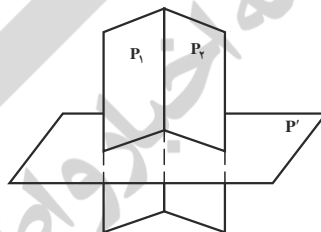
(ب) متقاطع ولی شکل آن در ۳ حالت قابل رسم است.



یا



یا



۴ الف) صفحات EFIG و FGJI متقاطع اند.

هر یک از صفحات EFIG و FGJI با صفحه ABCD منطبق اند.

(ب) موازی (ج) متقاطع (د) منطبق (ه) موازی (و) خط بر صفحه واقع است.

۵ الف) صفحات با هم متقاطع اند. (دوبه دو) (ب) متقاطع (ج) موازی

(د) خط EH در صفحه EIKH و ABCD واقع است و با صفحه JFGL موازی است.

(ه) متقاطع (و) متنافر (ت) متنافر

۶ الف) صفحات EIKH و FJLG موازی اند.

هر یک از صفحات EIKH و FJLG با صفحه ABCD متعامد (متقاطع) است.

(ب) موازی (ج) موازی (د) موازی (ه) موازی

۷ الف) (AB و DE) (AC و DF) (BC و EF)

(ب) (AB و CF) (AC و BE) (AD و EF)

(ج) (AB و BC) (AB و CF) (AC و BC) و

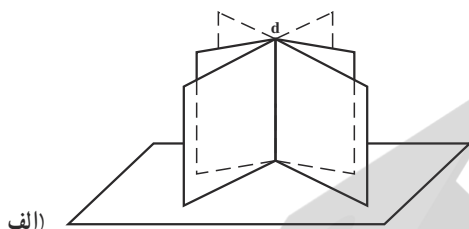
(ه) (خط BE و صفحه ACFD) (خط CF و صفحه ABED) (خط AD و صفحه BCFE)

و) (DEF و ABC)

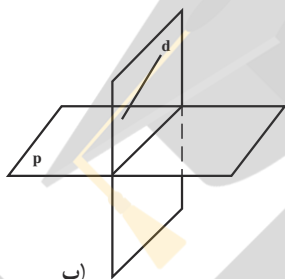
ز) (ACFD و BCFE و ABED)

۸ یک خط

۹ الف بی شمار صفحه



(الف)



(ب)

ب) یک صفحه

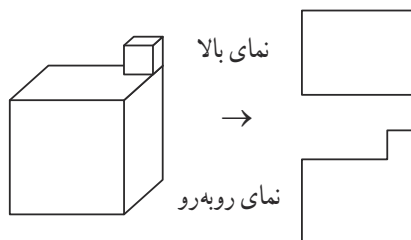
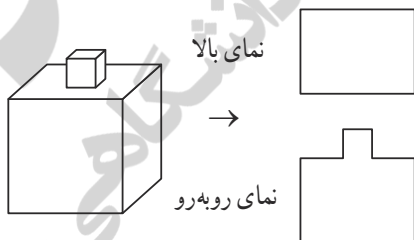
۱۰ موازی

۱۱ عمود

حل تمرین های فصل

کار در کلاس ۳ صفحه ۸۹

این مسئله بی شمار جواب دارد که به ذکر ۲ جواب بسنده می کنیم.



تمرین صفحه ۹۰ درس دوم

۱ ۵

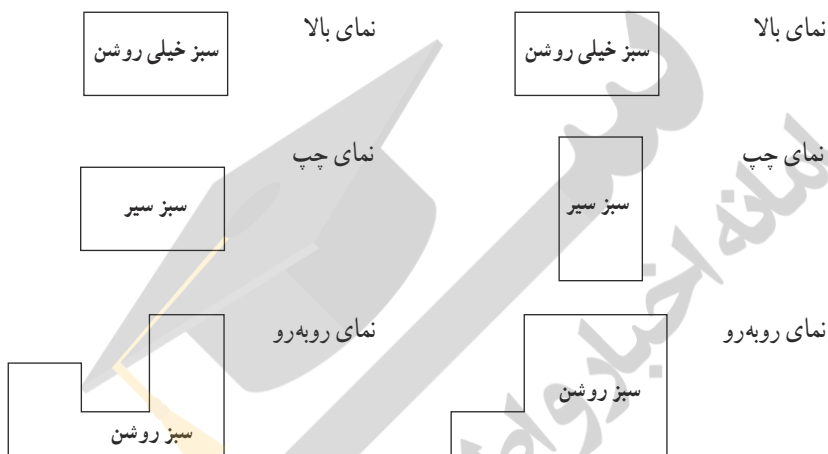
شکل چهارم سمت راست به ردیف دوم

۲ شکل اول سمت راست به ردیف چهارم

شکل دوم سمت راست به ردیف اول شکل پنجم سمت راست به ردیف سوم

شکل سوم سمت راست به ردیف پنجم

۳ نماهای شکل سمت راست نماهای شکل سمت چپ



۴

۶۴ تا

۸ تا

۶۴-۸=۵۶

۲۴ تا

۸ تا

۵ کل وجه‌ها $6 \times 8 = 48$

در ۱۵ وجه حرف A دیده نمی‌شود پس در $48 - 15 = 33$ وجه حرف A دیده می‌شود.

۶ $3 \times 16 = 48$ مکعب

حداقل ۱۵ تا و حداکثر ۳۷ تا

مجله ریاضی

۲) -

۱) -

۳) -

تمرین صفحه ۹۴ درس دوم

- ۱ الف) سطح مقطع مثلث است و منشور به دو منشور مثلثی تجزیه می‌شود.
 ب) سطح مقطع مثلث است و منشور به دو هرم تجزیه می‌شود. یک هرم مثلثی و یک هرم با قاعده مستطیل
 ج) سطح مقطع مستطیل است و منشور به دو منشور مثلثی تجزیه می‌شود.
 ۲ الف) مستطیل (ب) مثلث (متساوی الساقین) (ج) دوزنقه (متساوی الساقین)

۳

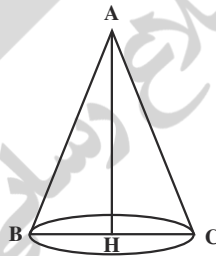
$$\text{شعاع دایره سطح مقطع } r=4 \rightarrow r^2=16 \rightarrow r^2=9+16=25$$

$$\text{مساحت سطح مقطع } S=16\pi$$

۴ دایره - مخروط

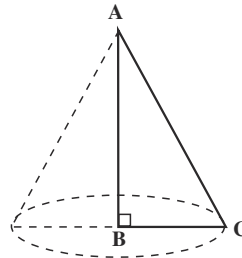
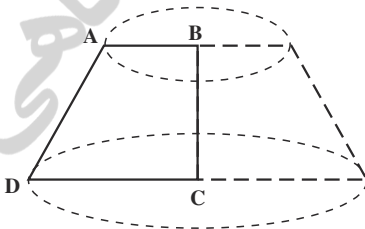
تمرین صفحه ۹۶ درس دوم

- ۱ جسم حاصل دو مخروط است که از رأس به هم چسبیده‌اند.
 ۲ الف) حول ارتفاع وارد بر قاعده تشکیل یک مخروط می‌دهد. (منظور ارتفاع وارد بر قاعده مثلث است)

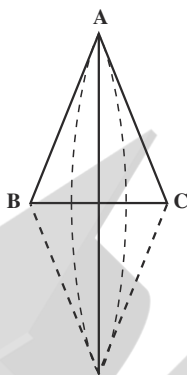


پ) مخروط ناقص

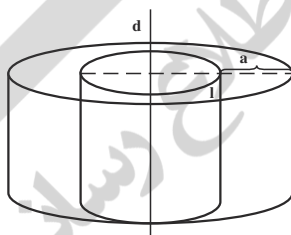
ب) مخروط



ت) دو مخروط یکسان که از قاعده به هم چسبیده‌اند.



۳ شکل حاصل از این دوران یک استوانه به شعاع قاعده $a+l$ است که در داخل آن استوانه‌ای به شعاع قاعده l خالی است.



۴ دایره - بیضی

