saednews.com

حسابان – معادلات و نامعادلات

محمد جواد صادقیان

آموزشگاه علمی آزاد دخترانه شریعت

نکاتی در مورد معادلات:

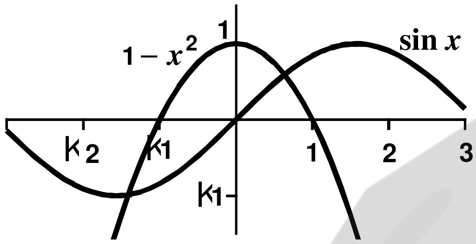
به طور کلی منظور از حل معادله ی $f(x)=0$ یعنی به دست آوردن عدد یا اعدادی که اگر به جای x جایگذاری شوند معادله برابر صفر می شود این اعداد را ریشه های f می نامند.

توجه: از نظر هندسی ریشه معادله ی $f(x)=0$ یعنی محل برخورد منحنی f با محور x ها.

توجه: اگر معادله ی به صورت $f_1(x)=f_2(x)$ باشد، طول محل تلاقی دو نمودار f_1, f_2 یعنی ریشه معادله ی $f_1(x)=f_2(x)$.

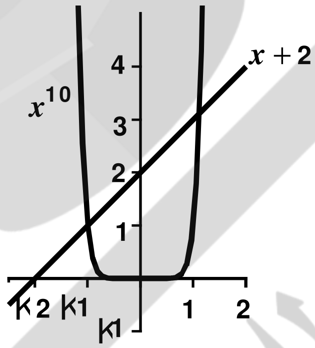
مثال: معادله ی $x^2+\sin x=1$ چند ریشه ی حقیقی دارد؟

حل: قرار می دهیم $\begin{cases} y_1=1-x^2 \\ y_2=\sin x \end{cases}$ و y_1, y_2 را در یک دستگاه رسم می کنیم:



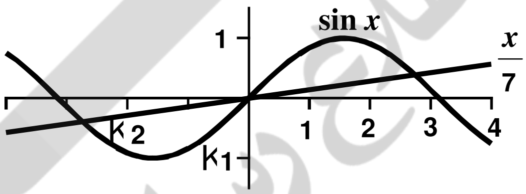
با توجه به شکل دو ریشه دارد.

مثال: معادله $x^{10}-x-2=0$ چند ریشه حقیقی دارد؟



قرار می دهیم $\begin{cases} y_1=x+2 \\ y_2=x^{10} \end{cases}$. دو ریشه

مثال: معادله $\frac{x}{7}-\sin x=0$ چند ریشه ی حقیقی دارد؟



قرار می دهیم $\begin{cases} y_1=\frac{x}{7} \\ y_2=\sin x \end{cases}$. سه ریشه

الف) معادلات رادیکالی با فرجه ی زوج:

1. دامنه یا حوزه ی تعریف معادله فاصله ای است که هم عبارات داخل رادیکال صفر یا مثبت باشد و هم عبارت مقابل رادیکال صفر یا مثبت باشد.

2. دامنه ی تعریف رادیکال ها نباید تهی باشد.

3. همه ی رادیکال های فرجه زوج صفر یا مثبت هستند.

مثال: معادله ی $\sqrt{x^2-9x+8}+\sqrt[4]{x^5-5x+4}=0$ چند ریشه حقیقی دارد؟

حل: تساوی وقتی برقرار است که داخل هر رادیکال مساوی صفر باشد، سپس جواب مشترک جواب معادله است.

$$x^2-9x+8=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=8 \end{cases}$$

$x=1$ در رادیکال دوم صدق می کند. پس معادله تنها یک ریشه دارد.

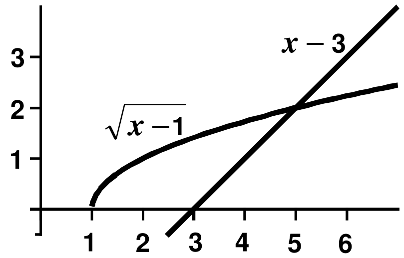
4. جواب به دست آمده باید در دامنه عبارت صدق کند.

مثال: معادله ی $x-3=\sqrt{x-1}$ چند ریشه ی حقیقی متمایز دارد؟

حل (1): ابتدا دامنه ی تعریف را مشخص می کنیم که عبارت است از $D:\begin{cases} x-3\geq 0 \\ x-1\geq 0 \end{cases} \Rightarrow x\geq 3$. سپس معادله را حل می کنیم:

$$\Rightarrow (x-3)^2=(\sqrt{x-1})^2 \Rightarrow x^2-6x+9=x-1 \Rightarrow x^2-7x+10=0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ \boxed{x=5} \end{cases}$$

saednews.com



حل (2): از طریق ترسیم

5. در بعضی از معادلات رادیکالی به کمک ابتدا یا انتهای دامنه ی تعریف می توان تعداد ریشه های حقیقی را پیدا کرد.

مثال: معادله ی $8x^3+10x^2+\sqrt{x-2}=104$ چند ریشه ی حقیقی دارد؟

حل: دامنه عبارت است از $D: x \geq 2$ که 2 ابتدای دامنه است و در معادله نیز صدق می کند.

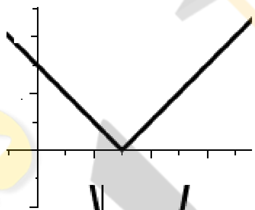
از طرفی اگر $x>2$ داریم: $\begin{cases} 8x^3>64 \\ 10x^2>40 \Rightarrow 8x^3+10x^2+\sqrt{x-2}>104 \\ \sqrt{x-2}>0 \end{cases}$ یعنی تساوی نمی تواند برقرار باشد. پس تنها ریشه ی معادله 2 است.

ب) معادلات دارای قدر مطلق:

قبل از توضیح معادلات دارای قدر مطلق ترسیم توابع دارای قدر مطلق را توضیح می دهیم.

الف) به طور کلی وقتی تابعی درون قدر مطلق قرار می گیرد قسمتی از نمودار تابع که پایین محور x ها قرار دارد به صورت قرینه به بالای محور x ها ترسیم می شود.

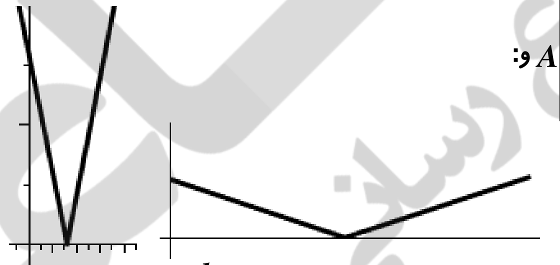
ب) نمودار توابع به فرم $y=|x-a|$ یک زاویه ی قائمه است که نقطه ی $A\begin{vmatrix} a \\ 0 \end{vmatrix}$ راس زاویه می باشد.



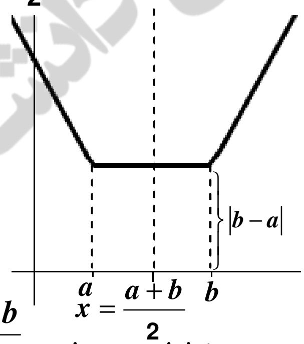
ج) نمودار توابع به فرم $y=|ax-b|$ یک زاویه است با راس $A\begin{vmatrix} \frac{b}{a} \\ 0 \end{vmatrix}$ و:

1. اگر $a>1$ زاویه حاده است.

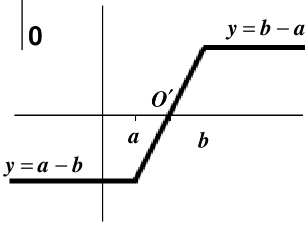
2. اگر $a<1$ زاویه منفرجه است.



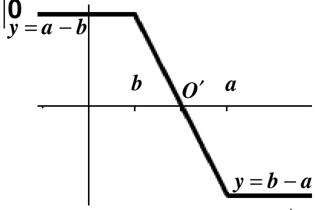
د) نمودار توابع به فرم $y=|x-a|+|x-b|$ یک پاره خط و دو نیم خط است و خط $x=\frac{a+b}{2}$ محور تقارن آن است. برد آن $[|b-a|,+\infty)$ می باشد.



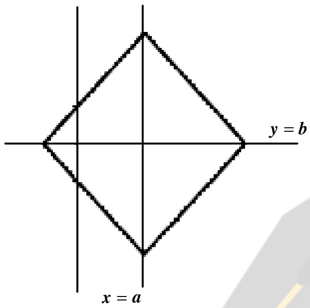
ر. نمودار توابع به فرم $a<b$, $y=|x-a|-|x-b|$ یک پاره خط و دو نیم خط است. نقطه ی $O'\begin{vmatrix} \frac{a+b}{2} \\ 0 \end{vmatrix}$ مرکز تقارن است. برد آن $[a-b,b-a]$ است.



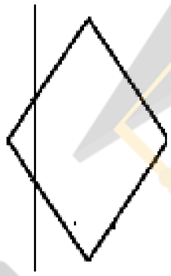
ز. نمودار توابع به فرم $a > b$, $y = |x-a| - |x-b|$ یک پاره خط و دو نیم خط است. نقطه ی $O'\left|\begin{matrix}\frac{a+b}{2}\\ 0\end{matrix}\right.$ مرکز تقارن است. برد آن $[a-b, b-a]$ است.



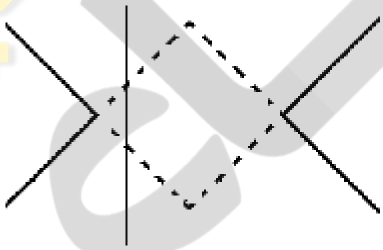
د. نمودار روابط به شکل $|x-a| + |y-b| = k > 0$ یک مربع با مرکز $O'\left|\begin{matrix}a\\ b\end{matrix}\right.$ است. و خطوط $y = \pm(x-a)+b, x=b, x=a$ معادلات محورهای تقارن است. طول قطر مربع $2k$ و مساحتش $2k^2$



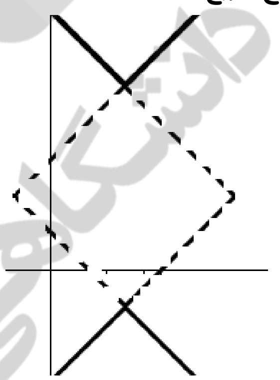
ذ. نمودار روابط به شکل $a \neq 0, c \neq 0, a \neq c$, $|ax-b| + |cy-d| = k > 0$ یک لوزی است.



س. نمودار روابط به شکل $|x-a| - |y-b| = k > 0$ دو زاویه قائمه است در امتداد اضلاع مربع (د)



ش. نمودار روابط به شکل $|y-b| - |x-a| = k > 0$ دو زاویه قائمه است در امتداد اضلاع مربع (د)



حل معادلات دارای قدر مطلق:

1. هر گاه یک شرط برای x و چند قدر مطلق داشته باشیم و بخواهیم حاصل آن چند قدر مطلق را پیدا کنیم، عددی را در فاصله ی شرط x، انتخاب می کنیم و آن را داخل قدر مطلق ها قرار می دهیم تا علامت آن ها معلوم شود، سپس بنا به مطالب گفته شده، حاصل آن قدر مطلق ها را پیدا می کنیم.

مثال: اگر $x<2$، آن گاه حاصل عبارت رو به رو را بیابید. $P=|2x-5|+|x-3|-|10-3x|$

حل: عدد 0 در شرط عبارت صدق می کند و به ازای آن داریم:

$$x=0\Rightarrow\begin{cases}|2x-5|=-2x+5\\|x-3|=-x+3\\|10-3x|=10-3x\end{cases}$$

$$P=|2x-5|+|x-3|-|10-3x|=-2x+5-x+3-10+3x=-2$$

2. در معادلاتی که قدر مطلق وجود دارد، جواب های به دست آمده باید با شرط اولیه سازگار باشد.

(تست): معادله $x^2+|x^2-3|=3$ چند جواب دارد؟

1) دو   2) چهار   3) بی شمار   4) صفر

حل: گزینه (3)   الف) $x\geq\sqrt{3}\;\; or \;\; x\leq-\sqrt{3}\Rightarrow x^2+x^2-3=3\Rightarrow x^2=3\Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$

کل فاصله $(-3,3)$ جواب می باشد.   ب) $-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}\Rightarrow x^2-x^2+3=3\Rightarrow 3=3$

(تست): معادله ی $x^2+|x^2-1|=1$ چند ریشه ی حقیقی دارد اگر $x\in Z$.

1) دو   2) سه   3) بی شمار   4) صفر

حل: گزینه ی (2)   الف) $-1\leq x\leq1\Rightarrow x^2-x^2+1=1\Rightarrow1=1\Rightarrow x=-1,0$

ب) $\begin{cases}x>1 \; or\\x<-1\end{cases}\Rightarrow x^2+x^2-1=1\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm1,0$

3. حل معادلات شامل دو قدر مطلق به صورت $a>b$, $k>0$, $|x-a|+|x-b|=k$

الف) اگر $k>|b-a|$ معادله دو ریشه ی حقیقی به صورت $x_1<a$, $x_2>b$ دارد.

ب) اگر $k=|b-a|$ معادله بی شمار ریشه در فاصله ی $[a,b]$ دارد.

ج) اگر $k<|b-a|$ معادله ریشه ندارد.

توجه: بهتر است با تعیین علامت یا ترسیم معادلات این چنین راه حل کنیم.

مثال: معادله $|x-1|+|x-4|=4$ چند ریشه دارد؟ $a=1$, $b=4$, $k=4$

$|b-a|=3\Rightarrow k>|b-a|$

حل(1). معادله دو جواب دارد.

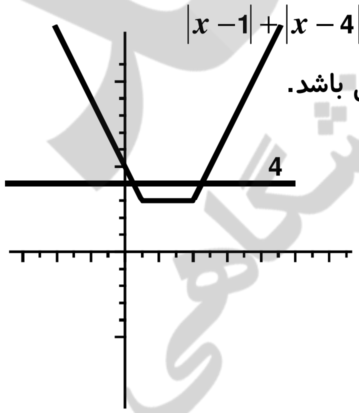
حل(2):

$$1)\; x<1\Rightarrow -x+1-x+4=4\Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

$$2)\; 1\leq x<4\Rightarrow x-1-x+4=4\Rightarrow 3\neq4$$

$$3)\; 4\leq x\Rightarrow x-1+x-4=4\Rightarrow x=\frac{9}{2}$$

حل(3): با رسم دو تابع $\begin{cases}y_1=|x-1|+|x-4|\\y_2=4\end{cases}$ تعداد نقاط برخورد دو منحنی تعداد ریشه ها می باشد.



توجه: در روش اول فقط می توان تعداد ریشه ها را مشخص کرد. در روش دوم علاوه بر تعداد خود ریشه ها نیز به دست می آیند. در روش سوم محل تقریبی ریشه ها را می توان مشخص کرد.

4. حل معادلات شامل دو قدر مطلق به صورت $a<b$, $k>0$, $|x-a|-|x-b|=k$

الف) اگر $a-b<k<b-a$ معادله یک ریشه ی در فاصله (a,b) دارد.

ب) اگر $k=a-b$ معادله بی شمار ریشه در فاصله ی $(-\infty,a]$ دارد.

ج) اگر $k=b-a$ معادله بی شمار ریشه در فاصله ی $[b,+\infty)$ دارد.

د) اگر $k<a-b$ یا $k>b-a$ معادله ریشه ندارد.

saednews.com

نکاتی در مورد معادلات درجه دوم به بالا:

1. هر معادله ی درجه ی n ، حداکثر n ریشه ی متمایز دارد.
2. اگر $f(a)f(b)<0$ آن گاه f در بازه ی (a,b) دارای ریشه است.
3. در هر معادله ی n مانند $ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\dots+k=0$ با n ریشه داریم:

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n} x_i=-\frac{b}{a}\\ \sum_{i,i=1}^{n} x_i x_j=\frac{c}{a}\\ \sum_{i,i,k=1}^{n} x_i x_j x_k=-\frac{d}{a}\\ \dots\\ x_1x_2\dots x_n=(-1)^n\frac{k}{a}\end{cases}$$

مثال: در معادله ی $x^{11}+7x-4=0$ مطلوبست محاسبه ی $\sum_{i=1}^{11} x_i^{11}$.

حل: داریم :

$$\begin{cases}x_1^{11}+7x_1-4=0\\ x_2^{11}+7x_2-4=0\\ \dots\\ \dots\\ x_{11}^{11}+7x_{11}-4=0\end{cases}\Rightarrow \sum_{i=1}^{11} x_i^{11}+7\sum_{i=1}^{11} x_i-11\times 4=0\Rightarrow \sum_{i=1}^{11} x_i^{11}=44-7\underbrace{\sum_{i=1}^{11} x_i}_{0}\left(\sum_{i=1}^{11} x_i=-\frac{b}{a}=\frac{0}{1}\right)\Rightarrow \sum_{i=1}^{11} x_i^{11}=44$$

4. اگر در معادله ی درجه ی n جمع ضرایب برابر $\underline{0}$ شود آن گاه $\underline{1}$ ریشه ی معادله است.
5. اگر جمع ضرایب جملات با توان زوج برابر جمع ضرایب جملات با توان فرد باشد 1 - ریشه ی معادله است.
6. هر گاه یکی از ریشه های معادله برابر a باشد با تقسیم معادله بر $(x-a)$ بقیه ریشه در صورت وجود به دست می آید.

مثال: ریشه های معادله ی $x^3-2x-5x+6=0$ را به دست آورید.

حل: چون $1-2-5+6=0$ پس 1 ریشه ی معادله است. با تقسیم چند جمله ای بر $(x-1)$ داریم:

$$x^3-2x-5x+6=(x-1)(x^2-x-6)=(x-1)(x+2)(x-3)$$

پس سایر ریشه ها 3 و 2 - می باشد.

7. اگر ریشه های معادله ی $ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\dots+k=0$ عضو Z باشند، عدد ثابت معادله یعنی k بر هر یک از ریشه بخش پذیر است.

<u>مثال</u>: ریشه های معادله ی $x^4-x^3-19x^2-11x+30=0$ عبارت اند از: $1,-2,5,-3$. می بینیم که عدد ثابت یعنی 30 بر همه ی آن ها بخش پذیر است.

8. اگر معادله ی درجه ی n مانند $ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\dots+k=0$ با ضرایب صحیح دارای ریشه ی گویا مانند $\frac{p}{q}$ باشد آن گاه k بر p و a بر q بخش پذیر است.

<u>مثال</u>: آیا معادله ی $2x^3-x^2-4x+2=0$ ریشه ی گویا دارد؟

حل: اگر معادله ریشه ی گویا مانند $\frac{p}{q}$ داشته باشد آن گاه 2 (جمله ی ثابت) بر p و 2 (ضریب x^3) بر q بخش پذیر است.

حالت های ممکن برای ریشه ی گویا $\left.\begin{matrix}p=\{\pm1,\pm2\}\\ q=\{\pm1,\pm2\}\end{matrix}\right\}\Rightarrow \frac{p}{q}=1,-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}$ با جایگذاری در معادله مشخص می گردد که معادله یک ریشه ی گویا دارد و آن $\frac{1}{2}$ است.

9. اگر $p(x)$ با ضرایب صحیح باشد و عدد c خالی از مربع باشد و $a+b\sqrt{c}$ ریشه ی $p(x)=0$ باشد، $a-b\sqrt{c}$ نیز ریشه ی $p(x)=0$ است.
10. اگر a_0 ، a_n ، $\sum_{i=0}^{n} a_i$ در $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\dots+a_0$ فرد باشند معادله ی $p(x)=0$ ریشه ی گویا ندارد و همه ی ریشه های آن گنگ می باشد.

<u>مثال</u>: معادله ی $5x^3+7x^2-2x+3=0$ ریشه ی گویا ندارد. زیرا 3 , 5 , $\sum_{i=0}^{4} a_i=5+7-2+3=13$ فرد هستند.

11. اگر $p(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\dots+a_0$ و $m=\max\limits_{0\le i\le n-1}|a_i|$ و α یک ریشه ی $p(x)=0$ باشد آن گاه $|\alpha|<1+m$

12. اگر $x_1, x_2, \dots, x_n$ ریشه های $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\dots+a_0$ باشند آن گاه:

$$\frac{1}{\left(\frac{a_1}{a_n}\right)^2-2\frac{a_2}{a_0}}<x_k^2<\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^2-2\frac{a_{n-2}}{a_n},\qquad r=\left(\frac{a_1}{a_n}\right)^2-2\frac{a_2}{a_0},\qquad R=\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^2-2\frac{a_{n-2}}{a_n}$$

13. اگر S تعداد تغییر علامات ضرایب $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\dots+a_0$ و T تعداد ریشه های مثبت $p(x)=0$ باشد در این صورت، $S\le T$ و $T-S$ زوج است.

14. فرض U تعداد تغییر علامات در ضرایب $p(-x)$ و V تعداد ریشه های منفی $p(x)=0$ باشد، در این صورت $V\le U$ و $U-V$ زوج است.

مثال: در مورد نوع ریشه های $3x^4+2x^3-4x^2+x-1=0$ بحث کنید.

حل: $S=3$ پس معادله 1 یا 3 ریشه مثبت دارد. (زیرا معادله ممکن است حداکثر 4 ریشه داشته باشد و از طرفی چون باید $T-S$ زوج باشد) لذا حداقل یک ریشه مثبت دارد. از طرفی $p(-x)=3x^4-2x^3-4x^2-x-1$ پس $U=1$ و لذا معادله یک ریشه منفی دارد. $r=\left(\frac{1}{-1}\right)^2-2\frac{-4}{-1}=-7<0$ پس معادله حتماً ریشه مختلط دارد. در نتیجه معادله دو ریشه حقیقی و دو ریشه ی مختلط دارد. با توجه به این که $\sum\limits_{i=0}^{4}a_i=1, a_0=-1, a_4=3$ معادله ریشه گویا ندارد.

سوالات تستی معادله :

1. نمودار تابع با ضابطه $f(x)=x^3+ax+b$ و خط به معادله $y+2x=b$ ، در نقطه ای به طول 1 روی محور x ها متقاطع اند. طول های دو نقطه تقاطع دیگر این منحنی و خط کدام است؟ (تجربی 89)

1) $-1,2$ 2) $-1,3$ 3) $0,-1$ 4) $0,2$

2. دو نقطه بر خط به معادله $y=x-1$ قرار دارند، که فاصله این نقاط از خط به معادله $2x-3y=5$ برابر $\sqrt{13}$ است. طول این دو نقطه کدام است؟ (تجربی 89)

1) $-15,9$ 2) $-15,11$ 3) $-11,15$ 4) $11,-9$

3. نمودار تابع با ضابطه $x>-1$ ، $f(x)=x^3-4x^2-x+4$ در بازه (a,b) زیر محور x ها است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟ (ریاضی 88)

1) 5 2) 3 3) 4 4) 2

حل: داریم $f(x)=x^3-4x^2-x+4=(x-4)(x^2-1)=(x-4)(x-1)(x+1)$. بعد از تعیین علامت داریم:

		−۱	۱	۴
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

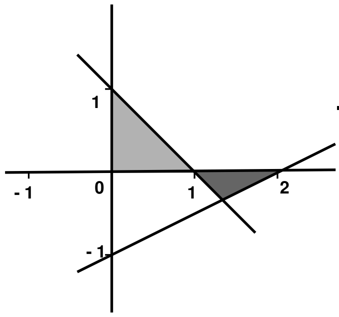
موافق علامت حاصل ضرب ضرایب xها

$$\boxed{x>-۱\Rightarrow(a,b)=(۱,۴)\Rightarrow b-a=۴-۱=۳}$$

4. اگر $x=4$ یکی از جواب های معادله ی $x+a=\sqrt{5x-x^2}$ باشد، جواب دیگر آن کدام است؟ (تجربی 87)

1) $\frac{1}{2}$ 2) 2 3) 3 4) جواب دیگر ندارد.

saednews.com



5. با توجه به شکل مقابل مساحت قسمت هاشور زده کدام است؟ (ریاضی 78)

1) $\frac{1}{2}$ 2) 2 3) 3 4) جواب دیگر ندارد.

6. معادله ی $x-3=\sqrt{x-1}$ چند ریشه حقیقی متمایز دارد؟

1) یک 2) دو 3) صفر 4) سه

7. معادله ی $2x+3x^2+2\sqrt{x-1}=5$ چند ریشه ی حقیقی دارد؟

1) صفر 2) یک 3) دو 4) بی شمار

8. معادله ی $x^3+x-1=0$، ...

1) دارای یک ریشه ی مثبت است. 2) دارای یک ریشه منفی است.

3) دارای دو ریشه ی مثبت و یک ریشه ی منفی است. 4) دارای دو ریشه ی منفی و یک ریشه ی مثبت است.

9. اگر معادله ی $x^3+x+a=0$ در بازه ی $(0,1)$ دارای جواب باشد، حدود a کدام است؟

1) $a>0$ 2) $a<-2$ 3) $a>2$ 4) $-2<a<0$

10. مجموع مینیمم و ماکزیمم مطلق تابع $y=|x+1|-|x+2|$ کدام است؟

1) صفر 2) 1 3) -1 4) $\frac{1}{2}$

11. حدود k چه باشد تا خط $y=k$ منحنی تابع $y=\left||x|-2\right|$ را در سه نقطه قطع کند؟

1) $0<k\le 2$ 2) $0<k<2$ 3) $k=2$ 4) $k\ge 2$

12. معادله $\frac{x+a}{a}-\frac{x-2a}{b}=3$ به ازای کدام مقادیر مبهم است. $(a,b\ne 0)$

1) $a=3b$ 2) $a+b=0$ 3) $ab=3$ 4) $a=b$

13. معادله $(x-a)(b-c)+(x-b)(c-a)+(x-c)(a-b)=0$ چند ریشه ی حقیقی دارد؟

1) یک 2) دو 3) سه 4) بی شمار

14. معادله $3x-2=2\sqrt{1-9x^2}$ چند ریشه ی حقیقی متمایز دارد؟

1) صفر 2) یک 3) دو 4) چهار

15. معادله $\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+2}=1$ چند ریشه حقیقی دارد؟

1) صفر 2) یک 3) دو 4) چهار

16. معادله $\sqrt{x^2-1}+\sqrt[4]{x^2+3x+2}+\sqrt[6]{x^2+4x+3}=0$ چند ریشه حقیقی دارد؟

1) صفر 2) یک 3) شش 4) چهار

17. معادله ی $3x-2=5\sqrt{1-9x^2}$

1) ریشه ندارد. 2) یک ریشه ی مضاعف دارد.

3) یک ریشه ی ساده دارد. 4) دو ریشه دارد.

18. معادله ی $x^2+x+\sqrt{x}=0$ چند جواب دارد؟

1) 1 2) 2 3) 3 4) ریشه ی حقیقی ندارد.

19. معادله ی $\sqrt[3]{x^2-3x}-2\sqrt[3]{(x^2-3x)^2}+1=0$ چند ریشه ی حقیقی دارد؟

1) چهار ریشه 2) سه ریشه 3) یک ریشه 4) دو ریشه

20. معادله ی $(x^2+\sqrt{x}+1)^2+x^2+\sqrt{x}-1=0$ چند ریشه ی حقیقی دارد؟

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

21. معادله ی $\left|x-|x|\right|=1$ دارای:

1) ریشه نیست.
2) یک ریشه ی مضاعف است.
3) یک ریشه ی مثبت است.
4) یک ریشه ی منفی است.

22. مجموع ریشه های معادله ی $(x-1)^2-5|x-1|+4=0$ برابر است با:

1) 10
2) 5
3) 4
4) 0

23. معادله ی $x^2-4x+|4x-x^2|=0$

1) دارای یک یا چند ریشه ی منفی است.
2) دارای تعدادی ریشه در فاصله $-4<x<0$ است.
3) دارای بیشمار ریشه است.
4) ریشه های نامحدود متعلق به فاصله ی $-\infty<x<+\infty$ است.

24. معادله ی $x|x|=kx\ (k\neq 0)$ همواره

1) یک ریشه دارد.
2) فقط دو ریشه دارد.
3) ریشه ندارد.
4) سه ریشه دارد.

25. مجموعه ی جواب معادله ی $\frac{|2x|}{|x+1|}=3$ عبارت است از:

1) $\left\{-\frac{3}{5},-3\right\}$
2) $\{3,-3\}$
3) ϕ
4) $\left\{\frac{3}{5},-3\right\}$

26. معادله ی $3x^3-7x-1=0$ چند ریشه ی گویا دارد؟

1) صفر
2) یک
3) دو
4) سه

27. کدام مطلب در مورد ریشه های حقیقی معادله ی $3x^4-4x^3+7x-1=0$ درست است؟

1) دارای یک ریشه ی مثبت است.
2) دارای یک ریشه منفی و یک ریشه مثبت است.
3) دارای دو ریشه ی مثبت و یک ریشه ی منفی است.
4) دارای دو ریشه ی منفی و یک ریشه ی مثبت است.

نکات و مثال در مورد نامساوی ها و نامعادلات :

1. به طرفین یک نامساوی می توان عددی اضافه یا کم کرد. $a>b\Rightarrow a\pm c>b\pm c$
2. طرفین یک نامساوی را می توان در عدد مثبتی ضرب یا بر عدد مثبتی تقسیم کرد. $\begin{cases}a>b\\ m>0\end{cases}\Leftrightarrow am>bm\quad or\quad \frac{a}{m}>\frac{b}{m}$
3. اگر طرفین یک نامساوی را در عدد منفی ضرب یا بر عدد منفی تقسیم کنیم، جهت نامساوی عوض می شود:

$$\begin{cases}a>b\\ k<0\end{cases}\Leftrightarrow ak<bk\quad or\quad \frac{a}{k}<\frac{b}{k}$$

4. طرفین نامساوی را می توان به توان عددی فرد رساند بدون این که جهت نامساوی عوض شود. یا از طرفین می توان ریشه ی فرد گرفت بدون این که جهت نامساوی عوض شود.

$$a>b \Leftrightarrow \begin{cases} a^3>b^3 \\ a^5>b^5 \\ \dots \end{cases} \quad or \quad a^{2n-1}>b^{2n-1} \quad n\in N \;, \qquad a>b \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{a}>\sqrt[3]{b} \\ \sqrt[5]{a}>\sqrt[5]{b} \\ \dots \end{cases} \quad or \quad \sqrt[2n-1]{a}>\sqrt[2n-1]{b} \quad n\in N$$

توجه: برای به توان زوج رساندن طرفین یک نامساوی یا ریشه ی زوج گرفتن از طرفین بدون این که جهت نامساوی عوض شود باید طرفین نامساوی مثبت باشند.

توجه کنید که هنگام ریشه ی زوج گرفتن (به شرط مثبت بودن طرفین) قدرمطلق ظاهر می گردد.

به مثال زیر توجه کنید:

مثال: نا معادله ی $(x-1)^2<4$ را حل کنید.

حل: $\sqrt{(x-1)^2}<\sqrt{4} \Leftrightarrow |x-1|<|2| \Leftrightarrow |x-1|<2 \Leftrightarrow -2<x-1<2 \Leftrightarrow -1<x<3$

جواب= $(-1,3)$

5. اگر طرفین نامساوی هم علامت باشند اگر طرفین را معکوس کنیم جهت نامساوی عوض می شود و اگر طرفین هم علامت نباشند با معکوس کردن طرفین جهت عوض نمی شود .

$$\begin{cases} 2<3 \Rightarrow \frac{1}{3}<\frac{1}{2} \\ -5<-4 \Rightarrow -\frac{1}{4}<\frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0<a<b \\ a<b<0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{b}<\frac{1}{a}$$

6. دو نامساوی هم جهت $\begin{cases} a>b \\ c>d \end{cases}$ را فقط و فقط می توان نظیر به نظیر با هم جمع کرد. $a+c>b+d$

توجه: دو نامساوی هم جهت را در صورتی می توان نظیر در نظیر در هم ضرب کرد که همه اعداد مثبت باشند: $\begin{cases} a>b>0 \\ c>d>0 \end{cases} \Rightarrow ac>bd$

7. وقتی عددی با معکوسش جمع می گردد یکی از دو حالت زیر پیش می آید:

الف) اگر x مثبت باشد: $x+\frac{1}{x}\geq 2$ ب) اگر x منفی باشد: $x+\frac{1}{x}\leq -2$

از این نامساوی ها می توان نتایج زیر را به دست آورد:

a) اگر $b,a\neq 0$ هم علامت باشند داریم: $\left(a^n+b^n\right)\left(\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}\right)\geq 4$ برای هر عدد طبیعی n

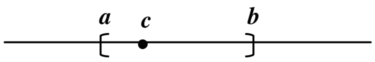
b) اگر $b,a\neq 0$ هم علامت نباشند داریم: $\left(a^n+b^n\right)\left(\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}\right)\leq 0$ برای هر عدد طبیعی n

8) اگر $c,b,a\in R$ داریم: $\boxed{a^2+b^2+c^2\geq ab+ac+bc}$

9) اگر $c,b,a>0$ داریم: $\boxed{(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc}$

10) نا مساوی $a^2\pm ab+b^2\geq 0$ به ازای هر b,a برقرار است.

11) یکی از مفاهیمی که به صورت نامساوی نوشته می شود همسایگی یک نقطه می باشد، که خود شامل دو دسته می باشد: 1) همسایگی عادی 2) همسایگی محذوف.



همسایگی: بازه ی باز (a,b) را همسایگی عادی نقطه ی c می نامیم. به عبارت دیگر هر بازه باز شامل نقطه c را همسایگی c می نامیم.

اگر c مرکز بازه باشد همسایگی را متقارن می گوییم. اگر از همسایگی متقارن مرکز آن را برداریم همسایگی متقارن محذوف به دست می آید.

همسایگی های متقارن به شکل $|x-a|<r$ می باشند که a مرکز همسایگی و r شعاع آن می باشد.

همسایگی های متقارن محذوف به شکل $0<|x-a|<r$ می باشند که a مرکز همسایگی و r شعاع آن می باشد.

توجه: برای نوشتن یک بازه مانند $a < x < b$ به شکل همسایگی متقارن می نویسیم: $\left|x-\frac{b-a}{2}\right| < \frac{a+b}{2}$.

مثال: نامساوی $3 < x < 5$ را به شکل قدر مطلق بنویسید.

حل: $3 < x < 5 \Rightarrow \frac{5+3}{2} = 4 \;,\; \frac{5-3}{2} = 1 \Rightarrow 3 < x < 5 \equiv |x-1| < 4$

مثال: کوچک ترین M مثبت را جوری به دست آورید که به ازای هر عضو مجموعه ی $\{x \in R \,\|\, x-1| < 3\}$ داشته باشیم: $|x| < M$.

حل: $|x-1| < 3 \Rightarrow -3 < x-1 < 3 \Rightarrow -2 < x < 4 \Rightarrow -4 < -2 < x < 4 \Rightarrow |x| < 4$

روابط نامساوی در قدر مطلق:

12. اگر $k > 0$ باشد آن گاه: $\begin{cases} |x| \le k & \Leftrightarrow -k \le x \le k \\ x^2 \le k^2 & \Leftrightarrow -k \le x \le k \end{cases}$

13. اگر $k > 0$ باشد آن گاه: $\begin{cases} |x| \ge k & \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge k \;\; or \\ x \le -k \end{cases} \\ x^2 \ge k^2 & \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge k \;\; or \\ x \le -k \end{cases} \end{cases}$

14. اگر $0 < a < b$ آن گاه: $\begin{cases} a \le |x| \le b & \Leftrightarrow \begin{cases} a \le x \le b \;\; or \\ -b \le x \le -a \end{cases} \\ a^2 \le x^2 \le b^2 & \Leftrightarrow \begin{cases} a \le x \le b \;\; or \\ -b \le x \le -a \end{cases} \end{cases}$

15. $|x| - |y| \le |x \pm y|$

16. $|x+y| \le |x| + |y|$

17. $|x-a| + |x-b| \ge |b-a|$

18. اگر $a < b$ آن گاه داریم: $a-b \le |x-a| - |x-b| \le b-a$

19. اگر $a > b$ آن گاه داریم: $b-a \le |x-a| - |x-b| \le a-b$

توجه: بعضی از نامعادلات با ویژگی هایی که تاکنون ذکر شد حل نمی شوند بلکه باید آن ها را تعیین علامت کرد تا محدوده جواب نامعادله به دست آید.

مثال: مجموعه جواب $x^3 < 4x$ را به دست آورید.

حل: می نویسیم $x^3 - 4x < 0$ پس $x(x^2-4) < 0 \Rightarrow x(x-2)(x+2) < 0$. بعد از تعیین علامت آن جواب عبارت است از:

جواب $= (-2,0) \cup (2,+\infty)$

توجه: نا معادلات مضاعف نامعادلاتی هستند که از دو نامساوی تشکیل شده اند. برای حل آن ها دو روش وجود دارد: 1) می توان آن ها را تک تک حل کرد سپس جواب مشترک را به دست آورد. 2) دو جدول تعیین علامت را بدون این که علامت های آن ها را در هم ضرب کنیم، زیر هم و یکجا رسم کنید و آن گاه جواب مشترک دو نامعادله را روی جدول به دست می آوریم. مثال زیر را با دو روش حل می کنیم.

مثال: نا معادله ی $|2x+3| < x^2$ را حل کنید.

حل: $|2x+3| < x^2 \Rightarrow -x^2 < 2x+3 < x^2 \Rightarrow \begin{cases} -x^2 < 2x+3 \\ 2x+3 < x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+2x+3 > 0 \\ x^2-2x-3 > 0 \end{cases}$

نا مساوی $x^2+2x+3 > 0$ همواره برقرار است زیرا $\Delta < 0, a > 0$. اما برای $x^2-2x-3 > 0$ بعد از تعیین علامت داریم: $x < -1 \;\; or \;\; x > 3$ که جواب مسئله می باشد.

saednews.com

مثال: نامعادله ی مضاعف $-1 \le \dfrac{x+2}{2x-3} \le 1$ را حل کنید.

چون نامعادله مضاعف است باید دستگاه
$$\begin{cases} \dfrac{x+2}{2x-3} - 1 \le 0 & : P_1 = \dfrac{-x+5}{2x-3} \le 0 \\ \dfrac{x+2}{2x-3} + 1 \ge 0 & : P_2 = \dfrac{3x-1}{2x-3} \ge 0 \end{cases}$$
را حل کنیم. بعد از تعیین علامت هر کدام، جواب مشترک را به دست می آوریم. جواب دستگاه(جواب مشترک): $x \le \dfrac{1}{3}$ or $x \ge 5$.

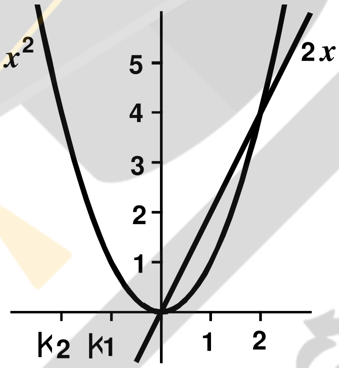
x	$-\infty$ تا $\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$ تا $\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$ تا 5	5 تا $+\infty$
$-x+5$	+	+	+	−
$2x-3$	−	−	+	+
P_1	−	−	+	−
$3x-1$	−	+	+	+
$2x-3$	−	−	+	+
P_2	+	−	+	+

راه دوم: تشکیل دو جدول تعیین علامت زیر هم: با توجه به جدول فقط در فاصله ی $x \le \dfrac{1}{3}$ or $x \ge 5$ داریم $P_1 \le 0$, $P_2 \ge 0$.

حل نامعادلات با رسم شکل

مثال: نامعادله ی $x^2 < 2x$ را حل کنید.

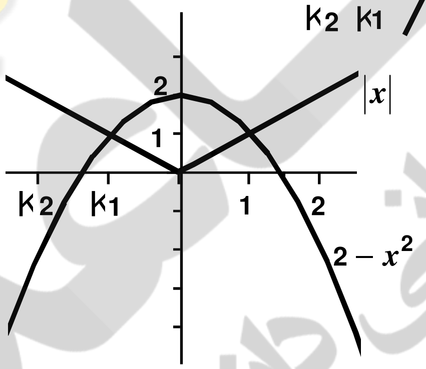
حل: ابتدا توابع $y_2 = 2x, y_1 = x^2$ را رسم می کنیم. با توجه به شکل تنها برای $0 < x < 2$ نمودار خط بالای سهمی قرار دارد و جواب نامعادله نیز به صورت $0 < x < 2$ به دست می آید.



مثال: مجموعه جواب نامعادله ی $x^2 + |x| > 2$ را به دست آورید.

حل: می نویسیم $|x| > 2 - x^2$ و قرار می دهیم $y_2 = 2 - x^2, y_1 = |x|$

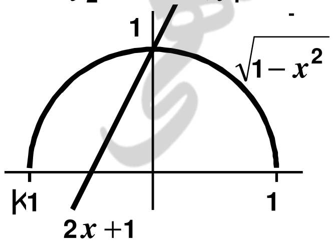
$x > 1$ or $x < -1 =$ جواب



مثال: مجموعه جواب نامعادله ی $\sqrt{1-x^2} > 2x+1$ کدام بازه ی زیر است؟

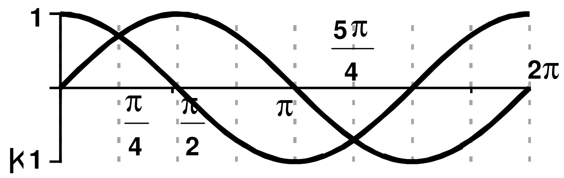
1) $(0,1)$ 2) $(-1,0)$ 3) $(-1,1)$ 4) $(-\frac{1}{2},0)$

حل: اگر بخواهیم نامعادله را با روش جبری حل کنیم زمان زیادی طول می کشد تا به جواب برسیم. اما بهتر است چنین نامعادلاتی را با روش هندسی یعنی رسم شکل حل کنیم که سریع تر به جواب می رسیم. با رسم نمودار های $y_2 = 2x+1, y_1 = \sqrt{1-x^2}$ در زمان کم تری جواب تعیین می شود. با توجه به شکل گزینه ی (2).



مثال: مجموعه جواب نامعادله $\sin x > \cos x$ را با شرط $0 \le x \le 2\pi$ به دست آورید.

حل: $\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right) =$ جواب



saednews.com

سوالات تشریحی:

1. هر یک از نامعادلات زیر را حل کنید:

1) $7x^2 - x - 6 \le 0$ 2) $\dfrac{(x^2-5x)(4-x^2)}{(x^2-9)(4-x)}$ 3) $\dfrac{x^2+1}{x} \ge 2$ 4) $x^4 + x^2 < 2$ 5) $\dfrac{x^4-1}{x^2-4} \le 16$

2. مجموعه جواب هر یک از نامعادله های مضاعف زیر را به دست آورید:

1) $\begin{cases} x^2 - 4x > 5 \\ x^2 + x < 0 \end{cases}$ 2) $-2 < \dfrac{x+2}{x-2} < 2$ 3) $\begin{cases} \dfrac{x+4}{x-1} > \dfrac{x-2}{x-3} \\ \dfrac{x+3}{x} < x+1 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 < 4 \\ |x-1| > 3 \end{cases}$

3. هر یک از نامعادله ها و دستگاه نامعادله های زیر را حل کنید:

1) $\dfrac{(x^2+1)(4+x^2)}{x^2-4} \le 0$ 2) $\dfrac{(x^2+3x+1)(1-x^2)}{x^2-4x+4} > 0$ 3) $\dfrac{(x^2+1)(x^4+1)}{(x^4-81)} < 0$ 4) $(x-1)^2 > (x-1)^2(x-2)$

4. مجموعه جواب نامعادله های زیر را به روش هندسی به دست آورید:

1) $\dfrac{x+1}{2} < \dfrac{2x-1}{3}$ 2) $x^2+1 > x$ 3) $x-2 < \sqrt{x}$ 4) $x^2 \ge \dfrac{1}{x}$ 5) $x^3 < x^2$ 6) $x^2 > 4$

5. به ازای کدام مجموعه ی مقادیر x عبارت جبری $\sqrt{4-x^2} + \sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}$ تعریف شده است؟

سوالات تستی نامعادله :

1. جواب نامعادله ی زیر کدام است؟ $-1 \le 3x - 2 \le 1$ (ریاضی 86)

1) $\dfrac{1}{3} \le x \le 1$ 2) $-1 \le x \le 1$ 3) $-1 \le x \le \dfrac{1}{3}$ 4) $-2 \le x \le 1$

2. در بازه ای، مقادیر تابع با ضابطه $y = x^2$ کم تر از مقادیر تابع باضابطه $y = |x-2|$ است، آن بازه کدام است؟ (ریاضی 81)

1) $(-2,1)$ 2) $(-1,0)$ 3) $(-1,1)$ 4) $(0,1)$

3. نا معادله ی $|2x-3| < x$ معادل کدام نامعادله است؟ (ریاضی 79)

1) $|x-2| < 1$ 2) $|x-1| < 2$ 3) $0 < |x-2| < 1$ 4) $0 < |x-1| < 1$

4. اگر نامساوی های $|x-1| < 0/1$, $A < 2x-3 < B$ معادل باشند، آن گاه $A+B$ کدام است؟ (ریاضی 78)

1) $-2/1$ 2) -2 3) $-1/1$ 4) -1

5. مجموعه ی جواب دستگاه نامعادلات $\begin{cases} |x| < 2 \\ (2x-1) < |x| \end{cases}$ کدام است؟ (ریاضی 78)

1) $\{x \mid -1 < x < 1\}$ 2) $\{x \mid -2 < x < 2\}$ 3) $\{x \mid 0 < x < 2\}$ 4) $\{x \mid -2 < x < 1\}$

6. مجموعه ی جواب های نامعادله ی $\left(\dfrac{1}{3}x + 4\right)(1+\sqrt{x}) < x + x\sqrt{x}$ کدام است؟ (ریاضی 77)

1) $\{x \mid x > 0\}$ 2) $\{x \mid x > 8\}$ 3) $\{x \mid 6 < x < 8\}$ 4) $\{x \mid x > 6\}$

7. مجموعه ی جواب نامعادله ی $\dfrac{(x+2)(x-1)}{x^2+x} > 1$ کدام است؟ (ریاضی 77)

1) $\{x \mid 0 < x < 1\}$ 2) $\{x \mid -1 < x < 0\}$ 3) $\{x \mid 1 < x < 2\}$ 4) $\{x \mid -1 < x < 1\}$

8. نامساوی $\dfrac{x^2-2x}{\sqrt{x}+1} > 0$ به ازای چه مقادیری از x برقرار است؟ (آزاد 71)

1) $x \ge 2$ 2) $x > 2$ or $x < 0$ 3) $0 < x < 2$ 4) $x > 2$

9. از دستگاه نامعادلات $\begin{cases} x+y>x \\ 6-\frac{1}{2}y>\frac{1}{2}x \end{cases}$ حدود تغییرات x کدام است؟ (ریاضی 71)

1) $x>12$ 2) $x>6$ 3) $x<6$ 4) $x<12$

10. اگر $x\geq 3$، مجموعه ی جواب های نامعادله ی $x^2-2|3-x|\leq 21$ کدام است؟ (ریاضی 73)

1) $\{x|3\leq x\leq 4\}$ 2) $\{x|-3\leq x\leq 5\}$ 3) $\{x|x\leq 4\}$ 4) $\{x|x\geq 5\}$

11. اگر $a>b$, $c>d$ آن گاه کدام یک از نامساوی های زیر ممکن است درست نباشد؟

1) $ac>bd$ 2) $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$ 3) $a+d>b+c$ 4) هر سه گزینه

12. اگر $A=\{x\in R||2x-3|\leq 5\}$، کوچک ترین k مثبت که برای هر $x\in A$ در رابطه ی $|x|\leq k$ صدق می کند کدام است؟

1) 3 2) 4 3) 5 4) 6

13. اگر $A=|x-1|+|2x-1|$ کدام رابطه به ازای جمیع مقادیر x برقرار است؟

1) $A\geq 1$ 2) $A\geq \frac{1}{2}$ 3) $A\leq 1$ 4) $A<\frac{1}{2}$

14. عضو ماکزیمم مجموعه $\{x\in Z|3x+11<0\}$ کدام است؟

1) 3 2) 4 3) 5 4) 6

15. اگر $|a|<|b|$، ساده شده ی $|a+b|+|a-b|$ کدام است؟

1) $|a|$ 2) $2|b|$ 3) $2|a|$ 4) $|b|$

16. اگر $a\leq b$ کدام یک از عبارت های زی همواره صحیح است؟

1) $a^2\leq ab$ 2) $a^3\leq a^2b$ 3) $a^3\leq b^2$ 4) $a^2\leq b^2$

17. اگر b,a قرینه نباشند مقدار عددی $\left|\frac{a}{a+b}\right|+\left|\frac{b}{a+b}\right|$:

1) همواره بزرگ تر از یک است. 2) همواره کوچک تر از یک است.
3) همواره بزرگ تر یا مساوی یک است. 4) همواره کوچک تر یا مساوی یک است.

18. جواب نامعادله ی $\frac{-x^2}{x-1}\leq 0$ کدام است؟

1) $(0,+\infty)$ 2) $(1,+\infty)$ 3) $(0,1)$ 4) $(1,+\infty)\cup\{0\}$

19. جواب نامعادله ی $\frac{1}{|x-2|}>1$ کدام است؟

1) $(1,3)$ 2) $(2,3)$ 3) $(1,2)$ 4) $(1,2)\cup(2,3)$

20. کسر $\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}$ در کدام فاصله ی زیر منفی است؟

1) $(-\infty,1)$ 2) $(2,3)$ 3) $(3,4)$ 4) $(2,+\infty)$

21. مجموعه جواب نامعادله ی $x^4+x^2<4x^2+4$ کدام است؟

1) $-4<x<4$ 2) $-2<x<2$ 3) $x<-2$ or $x>2$ 4) $x<-4$ or $x>4$

22. به ازای کدام مجموعه کسر $\frac{x^2-1}{x^2+1}$ از 2 کمتر است؟

1) R 2) ϕ 3) $\{x|-1<x<1\}$ 4) $\{x|x<-1\}$

23. مجموعه جواب های نامعادله ی $|x|(x^2-3x+2)\leq 0$ کدام است؟

1) $[1,2]$ 2) $[1,2]\cup\{0\}$ 3) $[-2,-1]$ 4) $\{0\}\cup[-2,-1]$

24. برای آن که سه جمله ای درجه ی دوم $(a-1)x^2-2bx-1$ به ازای هر مقدار x، برابر با مقداری مثبت باشد، لازم است که:

1) $b^2+a>1, a<1$
2) $b^2+a>1, a>1$
3) $b^2+a<1, a>1$
4) $b^2+a<1, a<1$

25. تعداد اعداد صحیحی که در نامساوی $n^2-8n+7<0$ صدق می کند برابر است با:

1) 5
2) 6
3) 7
4) 8

26. مجموعه ی جواب دستگاه نامعادلات $\begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{x}{4}<\frac{5}{6} \\ \frac{x}{2}-\frac{x}{3}<\frac{1}{2} \end{cases}$ کدام است؟

1) $x<3$
2) $x<1$
3) $0<x<1$
4) $1<x<2$

27. جواب نامعادله ی $(1-|x|)(x+1)>0$, $x\neq -1$ کدام است؟

1) $-1<x<1$
2) $|x|>1$
3) $x<1$
4) $x>1$

28. نامعادله ی $\left|x^2+4\right|<8$ چند دسته جواب دارد؟

1) یک
2) دو
3) سه
4) صفر

29. جواب های نامعادله $(x-2)^2-3|x-2|-4<0$ کدام است؟

1) $0<x<8$
2) $-2<x<2$
3) $-2<x<4$
4) $-2<x<6$