

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

## هندسه (۱)

رشته‌های ریاضی و فیزیک

پایه دهم

دوره دوم متوسطه

تهیه و تنظیم: پریسا استواری

کارشناسی ارشد ریاضی

دبیر ناحیه ۲ استان کرمانشاه

## فصل ۱: ترسیم‌های هندسی و استدلال

درس اول: ترسیم‌های هندسی

درس دوم: استدلال

بارم نوبت اول: ۹ نمره

بارم نوبت دوم: ۳ نمره

بارم شهریور: ۳ نمره

این فصل به دو بخش **ترسیم‌های هندسی** و **استدلال** تقسیم می‌شود.

### ترسیم‌های هندسی

- ۱- مقدمات رسم
- ۲- برخی از خواص نیمساز زاویه و ترسیم آن
- ۳- برخی از خواص عمودمنصف و ترسیم آن
- ۴- رسم خط عمود و خط موازی

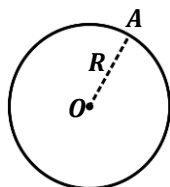
### استدلال

- ۱- استقرا و استنتاج
- ۲- قضیه‌های دوشروطی
- ۳- مثال نقض

## درس اول: ترسیم‌های هندسی

### دایره:

مجموعه همه نقاطی که از یک نقطه ثابت مانند  $O$  به فاصله معلومی مانند  $R$  هستند، دایره نامیده می‌شود.  $O$  را مرکز و  $R$  را شعاع دایره می‌نامیم.

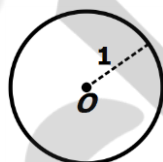


### مثال:

مجموعه نقاطی را مشخص کنید که فاصله آنها از یک نقطه برابر با 1 باشد.

### پاسخ:

یک نقطه ثابت مانند  $O$  را در نظر بگیرید. بینهایت نقطه در جهات مختلف  $O$  وجود دارند که فاصله آنها تا  $O$  برابر با 1 است. کافیست دهانه پرگار را به اندازه 1 باز کنیم و دایره‌ای به شعاع 1 و مرکز  $O$  رسم کنیم.



### تمرین:

مجموعه نقاطی را مشخص کنید که فاصله آنها از یک نقطه برابر با 2 باشد.

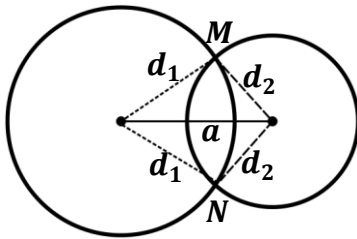
### تعیین نقطه‌ای که از دو نقطه ثابت به فاصله‌های معلوم باشد

فرض کنیم  $A$  و  $B$  دو نقطه ثابت به فاصله  $a$  از یکدیگر باشند. برای یافتن نقطه‌ای که از  $A$  به فاصله  $d_1$  و از  $B$  به فاصله  $d_2$  باشد، دو دایره یکی به مرکز  $A$  و شعاع  $d_1$  و دیگری به مرکز  $B$  و شعاع  $d_2$  رسم می‌کنیم. نقطه یا نقاط تلاقی دو دایره جواب است. به شکل صفحه بعد توجه کنید:

در شکل دو نقطه و از دو نقطه ثابت  $M$  و  $N$  به یک فاصله هستند.

اگر دو دایره مماس شوند مسئله یک جواب دارد.

اگر دو دایره یکدیگر را قطع نکنند، مسئله جواب ندارد.

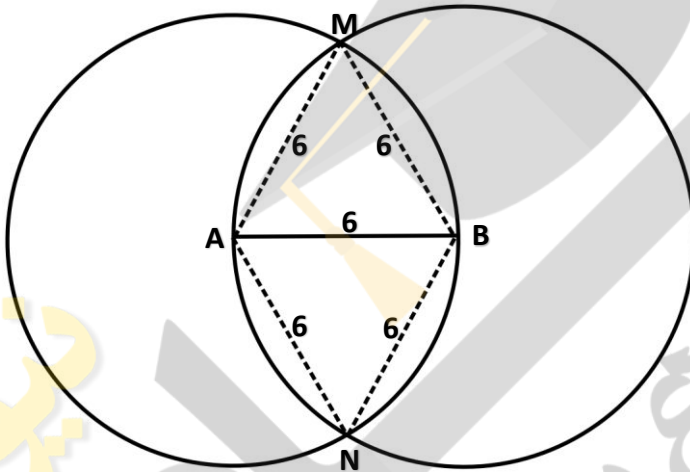


**مثال:**

دو نقطه  $A$  و  $B$  به فاصله 6 سانتی متر مفروض هستند. نقاطی را بیابید که از دو نقطه  $A$  و  $B$  به فاصله 6 سانتی متر باشند.

**پاسخ:**

نقاط  $M$  و  $N$  جواب هستند.

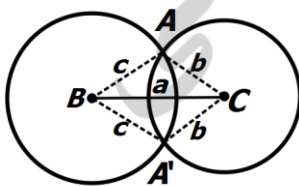


**رسم مثلثی که سه ضلع آن معلوم است**

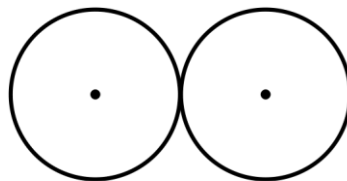
فرض کنیم سه ضلع مثلثی  $a$ ،  $b$  و  $c$  داده شده است. برای رسم مثلث، ابتدا یکی از سه ضلع داده شده مثلاً بزرگ‌ترین ضلع را رسم می‌کنیم ( $BC = a$ )، سپس به مرکز  $B$  و شعاع  $c$  و به مرکز  $C$  و شعاع  $b$  دو دایره رسم می‌کنیم. در صورت تقاطع دو دایره، جای رأس سوم مثلث یعنی نقطه  $A$  معلوم می‌شود.

الف) اگر دو دایره متقاطع باشند، مسئله دو جواب دارد. مثلث‌های  $ABC$  و  $A'BC$  که با یکدیگر به حالت (ض ض ض) هم‌نهشت‌اند.

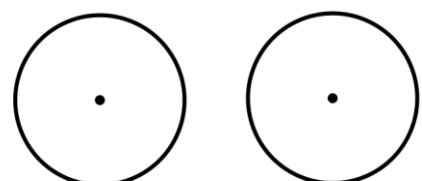
ب) اگر دو دایره مماس باشند، در این صورت مسئله جواب ندارد.



الف



ب



پ

**تمرین:**

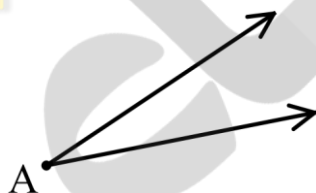
دو نقطه مانند  $A$  و  $B$  را به فاصله 3 سانتی متر از هم در نظر بگیرید. نقاطی را بیابید که فاصله شان از  $A$ ، 2 و از  $B$ ، 2.5 سانتی متر باشد.

**تمرین:**

توضیح دهید که چگونه می توان مثلثی به طول اضلاع 4 و 5 و 6 واحد رسم کنید.

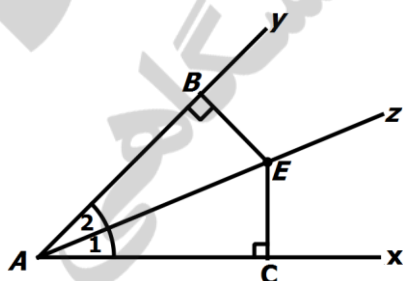
**زاویه**

دو نیم خط با ابتدای مشترک تشکیل یک زاویه می دهند. پس برای رسم یک زاویه کافیسست با استفاده از خط کش دو نیم خط متقاطع رسم کنیم.

**برخی خواص نیمساز یک زاویه**

الف) اگر نقطه ای روی نیمساز یک زاویه باشد، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است. یعنی در شکل زیر داریم:

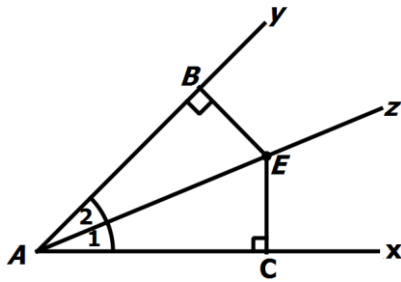
$$BE = CE$$



منظور از فاصله، کوتاهترین فاصله است که همان فاصله عمودی می باشد.

ب) اگر نقطه‌ای به فاصله یکسان از دو ضلع یک زاویه باشد، آن نقطه روی نیمساز آن زاویه قرار دارد. یعنی در

شکل زیر، با فرض  $BE = CE$ ، داریم  $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ .

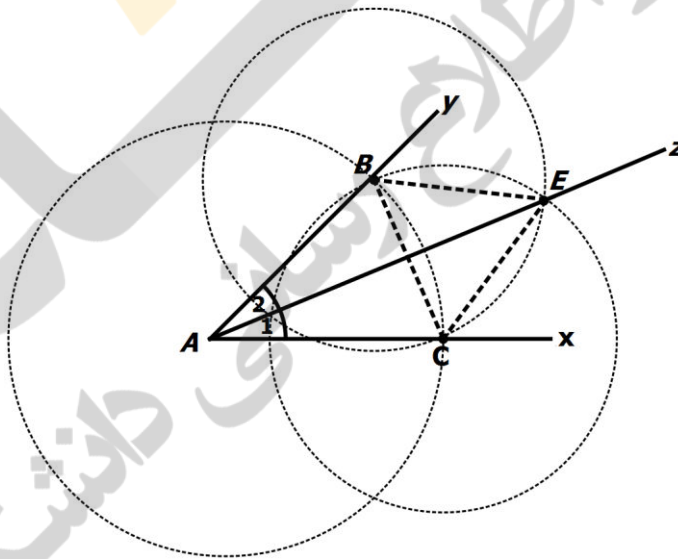


### رسم نیمساز یک زاویه

الف) دهانه پراگار را کمی باز کنید و به مرکز A کمانی بزنید تا نیم خط AX و AY را در نقطه B و C قطع کند، داریم  $AB = AC$

ب) به مرکز C و شعاع BC و بار دیگر به مرکز B و شعاع BC دو کمان رسم می‌کنیم. نقطه تلاقی این دو کمان را E می‌نامیم. داریم  $CE = BE$ .

پ) AE نیمساز زاویه XAY است. زیرا دو مثلث ABE و ACE به حالت (ض ض ض) هم‌نهشت‌اند. پس  $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ .



مثال:

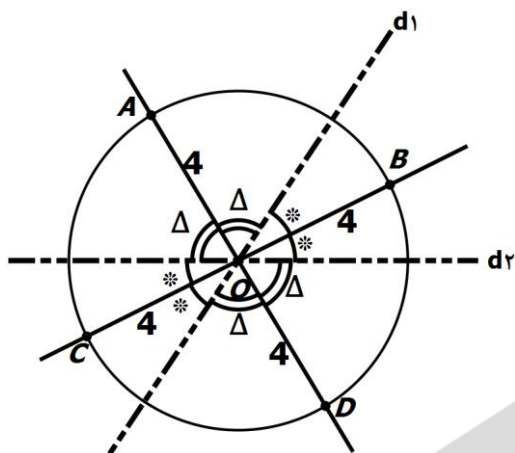
دو خط متقاطع  $d_1$  و  $d_2$  مفروضند. نقطه‌ای بیابید که از نقطه تقاطع دو خط به فاصله 4 سانتی‌متر باشد و از هر یک از دو خط  $d_1$  و  $d_2$  به یک فاصله باشد.

پاسخ:

نقطه‌ای که از دو خط متقاطع  $d_1$  و  $d_2$  به یک فاصله قرار دارد روی نیمساز زوایای ایجاد شده بین دو خط است. از طرفی نقطه‌ای که از نقطه O (محل تلاقی دو خط) به فاصله 4 سانتی‌متر است روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع 4 سانتی‌متر قرار

دارد، پس محل تلاقی این دایره با نیمسازها جواب است

یعنی  $A$ ،  $B$ ،  $C$  و  $D$ .



نکته

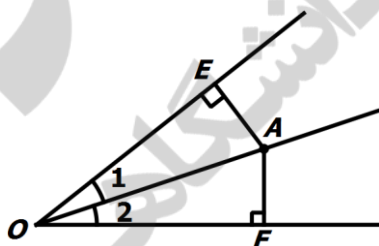
تمام نقاط روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع زاویه به یک فاصله‌اند.

### قضیه 1:

نشان دهید که تمام نقاط روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع زاویه به یک فاصله‌اند.

### اثبات:

زاویه  $O$  و نقطه  $A$  روی نیمساز  $O$  را در نظر بگیرید. می‌دانیم که فاصله یک نقطه از یک خط برابر است با طول پاره‌خط عمود بر آن. بنابراین از نقطه  $A$  به اضلاع زاویه  $O$  عمود می‌کنیم و نقاط تقاطع را  $E$  و  $F$  می‌نامیم. دو مثلث  $OAE$  و  $OAF$  را در نظر بگیرید. داریم:



$$\begin{cases} \overline{OA} = \overline{OA} \\ \widehat{AEO} = \widehat{AFO} = 90^\circ \\ \widehat{O_1} = \widehat{O_2} \quad (\text{نقطه } A \text{ روی نیمساز است}) \end{cases}$$

بنابراین دو مثلث  $OAE$  و  $OAF$  بنابر حالت وتر و یک زاویه حاده همنهشت هستند. یعنی

$$\triangle AEO \cong \triangle AFO$$

در نتیجه  $\overline{AE} = \overline{AF}$ . یعنی فاصله تمام نقاط روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع زاویه به یک اندازه‌اند.

## نکته

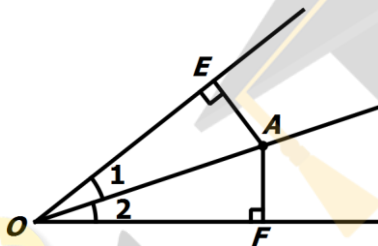
اگر نقطه‌ای از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد آنگاه حتماً روی نیمساز زاویه قرار دارد.

## قضیه 2:

نشان دهید که اگر نقطه‌ای از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد آنگاه حتماً روی نیمساز زاویه قرار دارد.

## اثبات:

نقطه  $A$  را داخل زاویه  $O$  طوری در نظر بگیرید که فاصله‌اش تا دو ضلع زاویه مقداری یکسان باشد.  $A$  را به  $O$  وصل می‌کنیم. دو مثلث  $OAE$  و  $OAF$  را در نظر بگیرید. داریم:



$$\begin{cases} \overline{OA} = \overline{OA} & (\text{ضلع مشترک}) \\ \widehat{AEO} = \widehat{AFO} = 90^\circ & (\text{طبق فرض}) \\ \overline{AE} = \overline{AF} & \end{cases}$$

بنابراین دو مثلث  $OAE$  و  $OAF$  بنابر حالت وتر و یک ضلع همنهشت هستند. یعنی

$$\triangle AEO \cong \triangle AFO$$

در نتیجه  $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$ .

یعنی اگر نقطه‌ای از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد آنگاه حتماً روی نیمساز زاویه قرار دارد.

## تمرین:

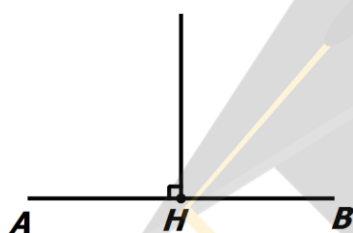
پاره خط  $AB$  به طول 8 سانتی متر مفروض است. نقاطی را تعیین کنید که از دو نقطه  $A$  و  $B$  به فاصله 6 سانتی متر باشند.

## تمرین:

توضیح دهید که چگونه می توان مثلثی به طول اضلاع 5 و 6 و 7 واحد رسم کنید.

## عمود منصف

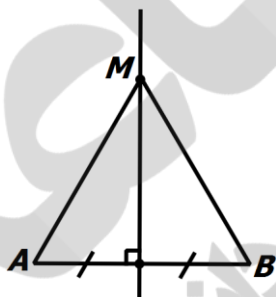
خطی است که بر پاره خط عمود است و آن را نصف می کند.



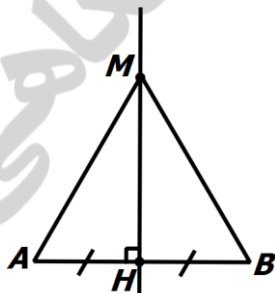
## برخی خواص عمود منصف یک پاره خط

الف) اگر نقطه ای روی عمود منصف یک پاره خط باشد، از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است. یعنی در شکل زیر داریم:

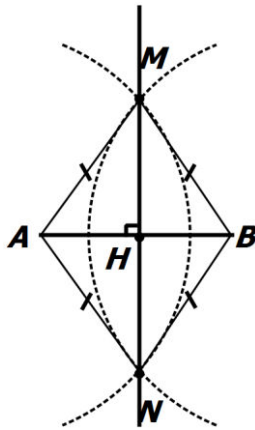
$$AM = BM$$



ب) اگر نقطه ای از دو سر یک پاره خط به یک فاصله باشد، روی عمود منصف آن پاره خط قرار دارد. یعنی در شکل زیر، با فرض  $AM = BM$ ، داریم  $AH = BH$  و  $MH \perp AB$ .



## رسم عمودمنصف یک پاره خط



پاره خط  $AB$  مفروض است.

دهانهٔ پرگار را بیش از نصف طول  $AB$  باز می‌کنیم و یک بار  
کمانی به مرکز  $A$  و بار دیگر با همان اندازه از نقطهٔ  $B$  کمان بزنیم  
تا یکدیگر را در دو نقطهٔ  $M$  و  $N$  قطع کنند. داریم:

$$AM = BM$$

$$AN = BN$$

زیرا اندازهٔ شعاع دایره ثابت است.

خط  $MN$  عمودمنصف پاره خط  $AB$  است، زیرا

$M$  و  $N$  از دو سر پاره خط  $AB$  به یک فاصله‌اند و  $MN \perp AB$ .

نکته

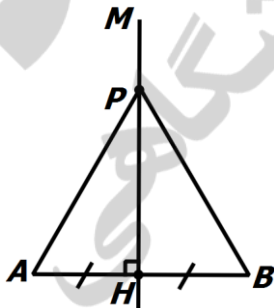
اگر نقطه‌ای روی عمودمنصف یک پاره خط باشد، فاصله‌اش از دوسر  
پاره خط به یک اندازه است.

### قضیه 3:

نشان دهید که اگر نقطه‌ای روی عمودمنصف یک پاره خط باشد، فاصله‌اش از دوسر پاره خط به یک اندازه است.

اثبات:

پاره خط  $AB$  و عمودمنصف  $MH$  و نقطهٔ  $P$  روی آن را در نظر بگیرید. نقطهٔ  $P$  را به  $A$  و  $B$  وصل می‌کنیم. داریم:



$$\begin{cases} \overline{PH} = \overline{PH} & (\text{ضلع مشترک}) \\ \widehat{H_1} = \widehat{H_2} = 90^\circ & (\text{طبق فرض}) \\ \overline{AH} = \overline{BH} & (\text{طبق فرض}) \end{cases}$$

بنابراین دو مثلث  $PHA$  و  $PHB$  بنابر حالت دو ضلع و زاویهٔ بین همنهشت هستند. یعنی

$$\triangle PHA \cong \triangle PHB$$

در نتیجه  $\overline{AP} = \overline{BP}$ .

## نکته

اگر نقطه‌ای فاصله‌اش تا دو سر یک پاره‌خط به یک اندازه باشد، آن گاه آن نقطه روی عمودمنصف پاره‌خط است.

## قضیه 4:

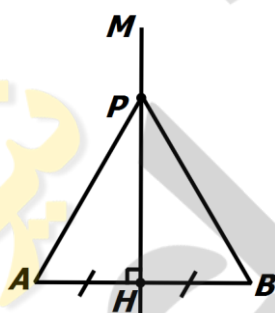
نشان دهید که اگر نقطه‌ای فاصله‌اش تا دو سر یک پاره‌خط به یک اندازه باشد، آن گاه آن نقطه روی عمودمنصف پاره‌خط است.

## اثبات:

پاره‌خط  $AB$  و نقطه  $P$  روی آن را در نظر بگیرید بطوریکه فاصله  $P$  تا دو سر پاره‌خط  $AB$  به یک اندازه باشد. یعنی

$$AP = BP$$

از نقطه  $P$  به  $AB$  عمود می‌کنیم و پای عمود را  $H$  می‌نامیم. داریم:



$$\begin{cases} P\bar{H} = P\bar{H} & (\text{ضلع مشترک}) \\ \widehat{H_1} = \widehat{H_2} = 90^\circ & (\text{طبق فرض}) \\ A\bar{P} = B\bar{P} & (\text{طبق فرض}) \end{cases}$$

بنابراین دو مثلث  $PHA$  و  $PHB$  بنابر حالت وتر و یک ضلع همنهشت هستند. یعنی

$$\triangle PHA \cong \triangle PHB$$

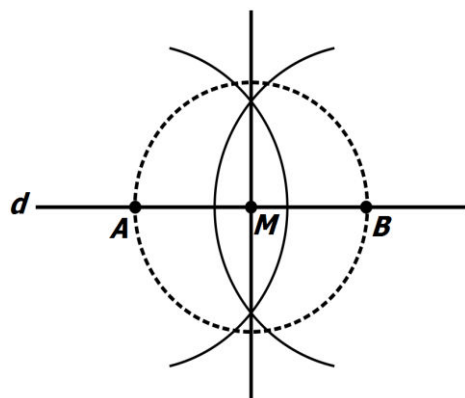
در نتیجه  $AH = BH$ ، پس  $P$  روی عمودمنصف  $AB$  قرار دارد.

■

## تمرین:

متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول قطرهای آن 6 و 8 باشد. چند متوازی‌الاضلاع با این شرایط می‌توان رسم کرد؟

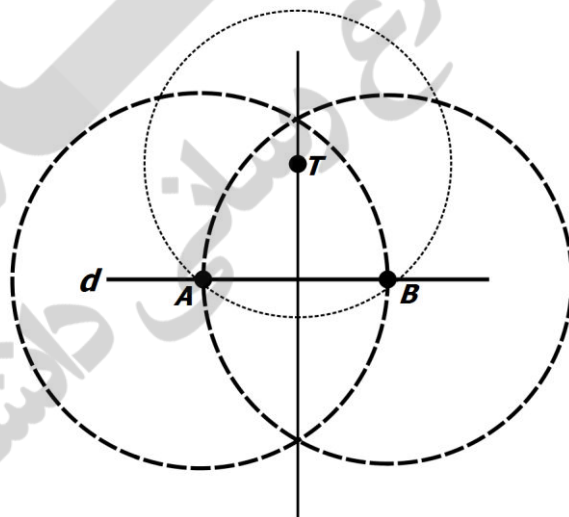
### رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای روی آن



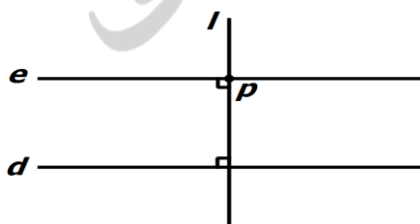
خط  $d$  و نقطه  $M$  را روی آن در نظر بگیرید.  
 دایره‌ای به مرکز  $M$  و شعاع دلخواه رسم کنید.  
 نقاط برخورد را  $A$  و  $B$  بنامید.  
 عمودمنصف پاره خط  $AB$  را رسم کنید.  
 در این صورت خطی عمود بر خط  $d$  رسم کرده‌ایم که از نقطه  $M$  می‌گذرد.

### رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای غیر واقع بر آن

خط  $d$  و نقطه  $T$  را روی آن در نظر بگیرید.  
 دهانه‌ی پرگار را بیشتر از فاصله  $T$  تا خط  $d$  باز کرده و دایره‌ای به مرکز  $T$  رسم کنید.  
 نقاط برخورد را  $A$  و  $B$  بنامید.  
 عمودمنصف پاره خط  $AB$  را رسم کنید.  
 نقطه  $T$  از نقاط  $A$  و  $B$  به یک فاصله است، بنابراین  $T$  روی عمودمنصف پاره خط  $AB$  و در نتیجه روی خط عمود بر خط  $d$  قرار دارد.



### رسم خط موازی با یک خط از یک نقطه غیر واقع بر آن



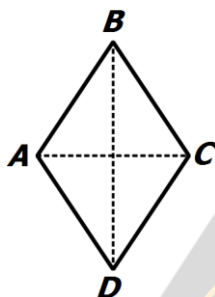
خط  $d$  و نقطه  $p$  خارج از آن را در نظر بگیرید:  
 خط عمود بر  $d$  و گذرنده از نقطه  $p$  را رسم کنید، آن را  $l$  می‌نامیم.  
 خط عمود بر  $l$  و گذرنده از نقطه  $p$  را رسم کنید، آن را  $e$  می‌نامیم.

خط  $l$  را به عنوان خط مورب گذرنده از دو خط  $d$  و  $e$  در نظر می‌گیریم. چون تمام زوایای حاصل با هم مساوی و برابر با  $90^\circ$  هستند بنابراین خط  $e$  با خط  $d$  موازی است.

## ترسیم لوزی

قبل از روش ترسیم، خواص لوزی را یادآوری می‌کنیم:

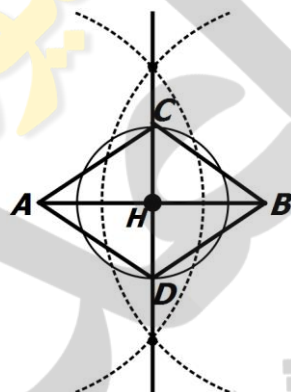
- ضلع‌های روبرو موازی‌اند.
- تمام اضلاع برابرند.
- زوایای روبرو دو به دو برابرند.
- قطرهای عمود منصف یکدیگرند.
- زوایای مجاور مکمل‌اند.
- دارای 2 محور تقارن است.
- قطرهای نیمساز زاویه‌ها هستند.



مثال:

لوزی با قطرهایی به طول 6 و 4 رسم کنید.

پاسخ:



پاره‌خط  $AB$  به طول 6 رسم می‌کنیم.

عمودمنصف  $AB$  را رسم می‌کنیم. نقطه برخورد با  $AB$  را  $H$  می‌نامیم.

دهانه پُرگار را به اندازه 2 باز کرده و دایره‌ای به مرکز  $H$  و شعاع 2 می‌زنیم.

نقاط برخورد با عمودمنصف را  $C$  و  $D$  می‌نامیم،  $C$  و  $D$  را به  $A$  و  $B$  وصل می‌کنیم.

چون قطرهای هر هم عمود هستند و یکدیگر را نصف می‌کنند

بنابراین چهارضلعی  $ABCD$  یک لوزی است.

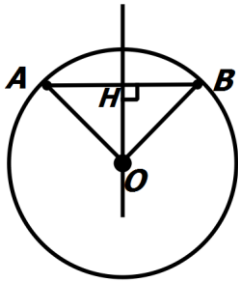
## یافتن مرکز دایره

قضیه 5:

عمودمنصف وتر یک دایره از مرکز آن می‌گذرد.

اثبات:

دایره‌ای به مرکز  $O$  و وتر  $AB$  در آن در نظر بگیرید. از  $O$  به  $AB$  عمود می‌کنیم و نقطه برخورد را  $H$  می‌نامیم. داریم:



$$\begin{cases} \overline{OH} = \overline{OH} & (\text{ضلع مشترک}) \\ \widehat{H_1} = \widehat{H_2} = 90^\circ & (\text{طبق فرض}) \\ \overline{OA} = \overline{OB} & (\text{طبق فرض}) \end{cases}$$

بنابراین دو مثلث  $OHA$  و  $OHB$  بنا بر حالت وتر و یک ضلع همنهشت هستند. یعنی

$$\triangle OHA \cong \triangle OHB$$

در نتیجه  $AH = BH$ ، در نتیجه عمود منصف وتر  $AB$  از  $O$  می‌گذرد. ■

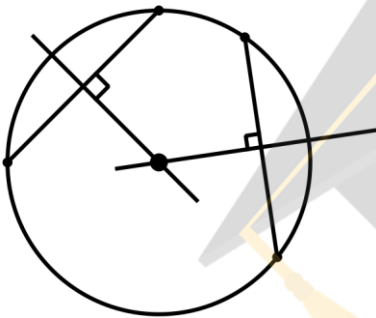
### پس برای یافتن مرکز یک دایره کافیت

- دو وتر از دایره را که با هم موازی نیستند رسم می‌کنیم.
- عمود منصف‌های آنها را رسم می‌کنیم.
- چون عمود منصف‌ها از مرکز دایره می‌گذرند،

بنابراین

محل برخورد عمود منصف‌های دو وتر غیرموازی در دایره،

مرکز دایره است.



### مثال:

متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول ضلع‌هایش 6 و 4 و طول یک قطر آن 7 باشد.

### پاسخ:

پاره خط  $AB$  به طول 7 رسم می‌کنیم.

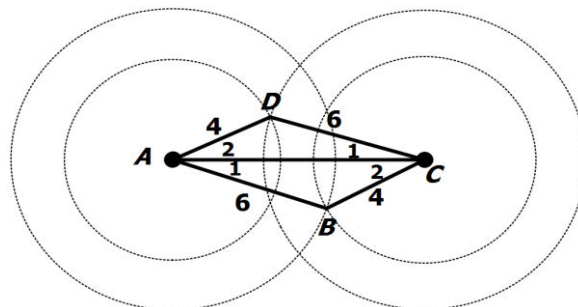
به مرکز  $A$  و به شعاع 4 و به مرکز  $C$  و شعاع 6 دو کمان رسم می‌کنیم، یک نقطه تلاقی آنها را  $D$  می‌نامیم.

به مرکز  $A$  و به شعاع 6 و به مرکز  $C$  و شعاع 4 دو کمان رسم می‌کنیم، یک نقطه تلاقی آنها را  $B$  می‌نامیم.

چهارضلعی  $ABCD$  متوازی‌الاضلاع مطلوب است، زیرا دو مثلث  $ABC$  و  $CDA$  به حالت (ض ض ض) همنهشت‌اند.

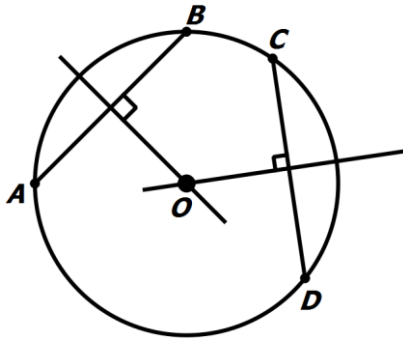
پس:

$$\widehat{A_1} = \widehat{C_1} \Rightarrow AB \parallel CD \quad \widehat{A_2} = \widehat{C_2} \Rightarrow BC \parallel AD$$



**مثال:**

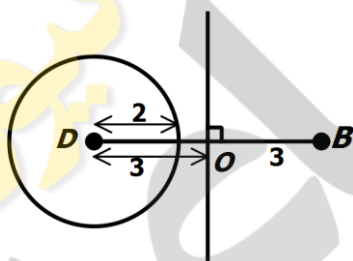
میدان یک شهر به صورت دایره است. می‌خواهیم مرکز آن را یافته و در آن جا مجسمه‌ای قرار می‌دهیم. به کمک وسایل ترسیم و ترسیم‌های مقدماتی، مرکز این دایره را بیابید.

**پاسخ:**

می‌دانیم که مرکز دایره روی عمودمنصف‌های وترهای آن قرار دارد. دو وتر دلخواه  $AB$  و  $CD$  را می‌کشیم و عمودمنصف‌های آن‌ها را رسم می‌کنیم، محل برخورد این عمودمنصف‌ها مرکز دایره را نشان می‌دهد.

**مثال:**

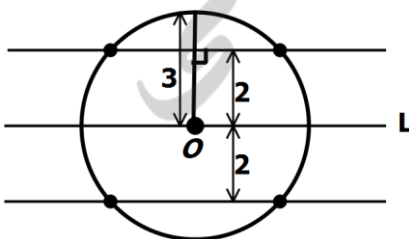
چند لوزی به طول ضلع 2 و قطر کوچک 6 می‌توان رسم کرد؟

**پاسخ:**

می‌دانیم که قطرهای لوزی عمودمنصف یکدیگرند، پس ابتدا پاره‌خطی به طول 6 می‌کشیم و عمودمنصف آن را رسم می‌کنیم. حالا دایره‌ای به مرکز  $D$  و شعاع 2 رسم می‌کنیم. محل برخورد این دایره با عمودمنصف  $BD$  جای دو رأس دیگر است. اما دقت کنید که دایره‌ای به شعاع 2 اصلاً نمی‌تواند این خط را قطع کند. پس با این اندازه‌ها لوزی قابل رسم نیست.

**مثال:**

نقطه  $O$  روی خط  $L$  قرار دارد. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از نقطه  $O$  به فاصله 3 و از خط  $L$  به فاصله 2 باشند؟

**پاسخ:**

نقاطی که از نقطه  $O$  به فاصله 3 هستند، دایره‌ای به مرکز  $O$  و شعاع 3 است و نقاطی که از خط  $L$  به فاصله 2 هستند، دو خط موازی خط  $L$  خواهند بود. نقاط تلاقی این دو خط و دایره، نقاط مورد نظر هستند.

## درس دوم: استدلال

در احکام و مسائل هندسی همواره به استدلالی نیاز است که درستی یا نادرستی هر یک را نشان می‌دهد. (اثبات کند) در اینگونه موارد، معمولاً به دو صورت با مسأله برخورد می‌شود.

### استدلال استقرایی:

در این روش با چندین مشاهده، یک نتیجه‌گیری کلی انجام می‌دهیم. یعنی:

**استدلال استقرایی رسیدن از جزء به کل است.**

**مثال:**

یک انسان دوره‌ماقبل تاریخ را در نظر بگیرید. او ممکن است بعد از کشف آتش، این تجربیات را داشته باشد:

- با حرارت دادن آب، ببینید پس از مدتی آب به بخار تبدیل می‌شود.
- با حرارت دادن یک تکه یخ، آن هم به بخار تبدیل شده است.

و به علت دانش و اطلاعات ناقص، نتیجه گرفته باشد که:

هر شیء با حرارت دیدن، بعد از مدتی به بخار تبدیل می‌شود.

می‌دانیم که این نتیجه برای تمام اشیاء صحیح نیست و در نتیجه استدلال استقرایی ممکن است نتایج نادرست حاصل کند.

### استدلال استنتاجی:

برخورد صحیح با یک حکم این است:

- بر اساس نتیجه‌گیری منطقی بر پایه واقعیت‌هایی است که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم و به آن «استدلال استنتاجی» می‌گویند. بنابراین

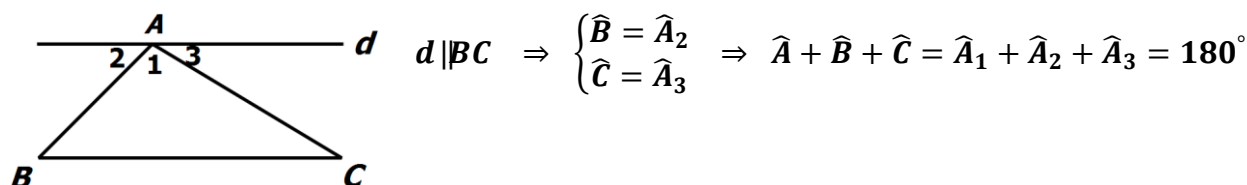
**استدلال استنتاجی رسیدن از کل به جزء است.**

**مثال:**

نشان دهید مجموع زوایای داخلی هر مثلث  $180^\circ$  است.

**پاسخ:**

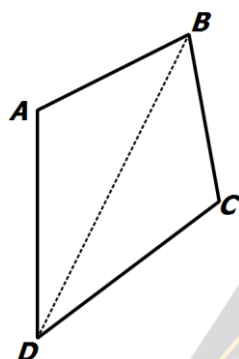
مثلث  $ABC$  را در نظر بگیرید. از رأس  $A$  خطی موازی  $BC$  رسم کنید. داریم:



**مثال:**

نشان دهید مجموع زوایای داخلی هر چهارضلعی محدب  $360^\circ$  است.

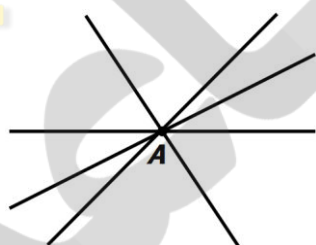
**پاسخ:**



می‌دانیم مجموع زوایای داخلی هر مثلث  $180^\circ$  است. یک چهارضلعی دلخواه مانند  $ABCD$  در نظر می‌گیریم و دو رأس مقابل آن را به هم وصل می‌کنیم. مجموع زوایای داخلی چهارضلعی  $ABCD$  با مجموع زاویه‌های داخلی دو مثلث  $ABD$  و  $BCD$  برابر است. بنابراین مجموع زاویه‌های داخلی چهارضلعی  $ABCD$  برابر است با  $360^\circ$ .

**خطوط هم‌رس:**

چند خط که همگی در یک نقطه مانند  $A$  مشترک باشند را هم‌رس گویند. نقطه  $A$  را نقطه هم‌رسی این خط‌ها می‌نامیم.



**مثال:**

نشان دهید نیمسازهای زوایای داخلی هر مثلث هم‌رس‌اند.

**پاسخ:**

مثلث دلخواه  $ABC$  را در نظر گرفته، نیمسازهای زوایای  $\hat{A}$  و  $\hat{B}$  را رسم کرده و نقطه تقاطع آن‌ها را  $O$  می‌نامیم. همچنین با رسم عمودهایی از  $O$  بر اضلاع، فاصله  $O$  تا سه ضلع به صورت  $OH$ ،  $OK$  و  $OL$  مشخص می‌شوند. اکنون توجه کنید:

• چون  $O$  نیمساز زاویه  $\hat{A}$  است، طبق خاصیت نیمساز داریم:

$$OK = OL$$

- چون  $O$  نیمساز زاویه  $\widehat{B}$  است، طبق خاصیت نیمساز داریم:

$$OH = OL$$

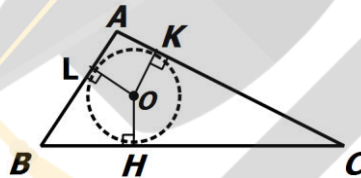
با مقایسه دو تساوی فوق نتیجه می گیریم که:  $OK = OH$ . یعنی فاصله  $O$  تا دو ضلع زاویه  $\widehat{C}$  نیز با هم برابر است و در نتیجه:

نقطه  $O$  روی نیمساز  $\widehat{C}$  نیز قرار داشته و سه نیمساز در نقطه  $O$  هم رس هستند.

#### نتیجه:

با توجه به اثبات بالا، به دو مورد جالب دست می یابیم:

- نقطه‌ی هم‌رسی سه نیمساز زوایای داخلی، نقطه‌ای چون  $O$  درون مثلث است با این خاصیت که: فاصله‌ی  $O$  تا سه ضلع مثلث با هم برابر است:  $OH = OK = OL$ .
- اگر دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی  $OH$  باز کرده و به مرکز  $O$  دایره‌ای رسم کنیم، این دایره از نقاط  $H$ ،  $K$  و  $L$  عبور خواهد کرد:



این دایره از داخل مثلث بر هر سه ضلع آن مماس است.

#### مثال:

نشان دهید عمودمنصف‌های اضلاع هر مثلث هم‌رس‌اند.

#### پاسخ:

مثلث دلخواه  $ABC$  را در نظر گرفته، چون پاره‌خط‌های  $AB$  و  $AC$  متقاطع‌اند، عمودمنصف‌های آنها نیز در نقطه‌ای مانند  $O$  متقاطع‌اند.

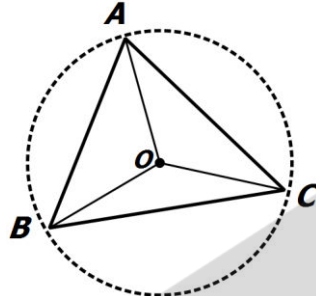
- نقطه  $O$  روی عمودمنصف پاره‌خط  $AC$  است، بنابراین  $OA = OC$ .
- نقطه  $O$  روی عمودمنصف پاره‌خط  $AB$  است، بنابراین  $OA = OB$ .

در نتیجه  $OB = OC$ . بنابراین نقطه  $O$  روی عمودمنصف  $BC$  قرار دارد. در نتیجه نقطه  $O$  محل برخورد عمودمنصف اضلاع مثلث  $ABC$  است.

#### نتیجه:

با توجه به اثبات بالا، به دو مورد جالب دست می یابیم:

- نقطه‌ی هم‌رسی سه عمودمنصف اضلاع مثلث، نقطه‌ای چون  $O$  درون مثلث است با این خاصیت که: فاصله‌ی  $O$  تا سه رأس مثلث با هم برابر است:  $OA = OB = OC$ .
- اگر دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی  $OA$  باز کرده و به مرکز  $O$  دایره‌ای رسم کنیم، این دایره از هر سه رأس مثلث عبور خواهد کرد:



### مثال:

نشان دهید ارتفاع‌های وارد بر اضلاع هر مثلث هم‌رس‌اند.

### پاسخ:

مثلث دلخواه  $ABC$  را در نظر گرفته و از هر رأس آن خطی به موازات ضلع مقابل به آن رأس رسم کنید تا مطابق شکل، مثلثی  $DEF$  مانند به وجود آید.

(۱) چهارضلعی  $ABCF$  متوازی‌الاضلاع است، زیرا اضلاع مقابل در آن موازیند. بنابراین  $BC = AF$ .

(۲) چهارضلعی  $ACBE$  متوازی‌الاضلاع است، زیرا اضلاع مقابل در آن موازیند. بنابراین  $BC = AE$ .

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم:  $AF = AE$ ، بنابراین نقطه  $A$  وسط پاره خط  $EF$  است.

$$\begin{cases} AG \perp BC \\ BC \parallel EF \end{cases} \Rightarrow AG \perp EF$$

لذا خط  $AG$  عمودمنصف پاره خط  $EF$  است.

به‌طور مشابه می‌توان نشان داد:

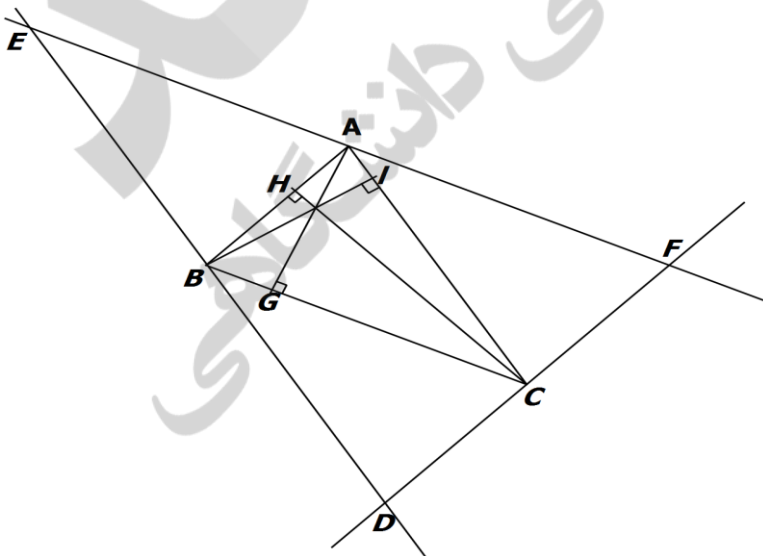
پاره خط  $BI$ ، عمودمنصف پاره خط  $DE$  است.

پاره خط  $CH$ ، عمودمنصف پاره خط  $DF$  است.

بنابراین، ارتفاع‌های مثلث  $ABC$ ، روی عمود

منصف اضلاع مثلث  $DEF$  هستند و در نتیجه

هم‌رسند.

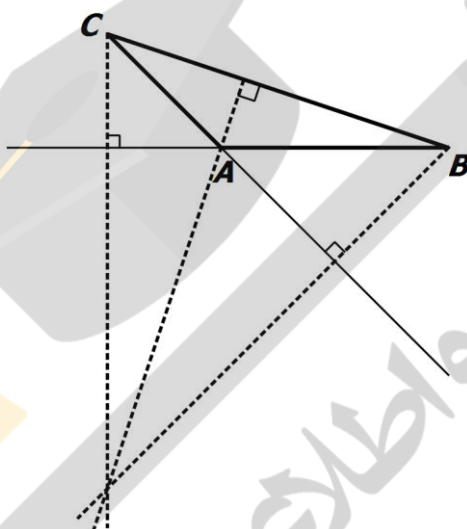


## نتیجه:

بر خلاف نقطه همرسی نیمسازهای مثلث که همیشه درون مثلث قرار دارد، نقطه همرسی ارتفاعها و عمود منصفهای اضلاع ممکن است بیرون مثلث قرار گیرند.

## مثال:

در مثلث  $ABC$ ، دو ارتفاع بر امتداد ضلع مقابل  $BC$  عمود شده است. در نتیجه، نقطه همرسی  $O$  در بیرون مثلث قرار گرفته است.



## تمرین:

مثلث دلخواه  $ABC$  را با شرایط تند بودن زوایای داخلی رسم کرده و  $O$  را نقطه همرسی ارتفاعهای آن در نظر بگیرید. سپس نقطه همرسی ارتفاعهای مثلث  $OAC$  را مشخص کنید.

## مثال نقض:

اگر یک حکم نادرست باشد، کافی است یک مثال بیاوریم که نادرست بودن آن را نشان دهد. به چنین مثالی «مثال نقض» گفته می‌شود.

**مثال:**

برای موارد زیر مثال نقض آورده و آن‌ها را رد کنید.  
 الف) اگر  $x^2 > 4$  باشد، در این صورت  $x > 2$  است.  
 ب) نقطهٔ هم‌رسی ارتفاع‌های مثلث همیشه درون آن قرار می‌گیرد.

**هم‌پاسخ:**

الف) عدد  $x = -3$  را در نظر بگیرید. مشاهده می‌کنید که  $(-3)^2 = 9 > 4$  صحیح بوده ولی  $-3$  بزرگ‌تر از  $2$  نیست و نابراین حکم نادرست است.  
 ب) کافی است مثلی با یک زاویه‌ی باز را به عنوان مثال نقض در نظر بگیرید. زیرا نقطهٔ هم‌رسی ارتفاع‌ها خارج مثلث قرار می‌گیرد.

**تمرین:**

برای موارد زیر مثال نقض آورده و آن‌ها را رد کنید.  
 الف) همهٔ اعداد صحیح مثبت‌اند.  
 ب) هر چهار ضلعی که چهار ضلع برابر داشته باشد، مربع است.  
 پ) هر چهار ضلعی که دو ضلع موازی و دو ضلع برابر داشته باشد، متوازی‌الاضلاع است.

**قضیه شرطی و دو شرطی:****گزاره:**

- در ریاضیات، به هر ادعا یا خبر که یا «دقیقاً درست» و یا «دقیقاً نادرست» است، یک «گزاره» گویند.
- اگر گزاره فقط شامل یک خبر باشد، به آن یک گزاره‌ی «ساده» گوئیم.
  - نمونه: عبارت «عدد 7 سومین عدد اول است» یک گزاره‌ی ساده است.
  - اگر گزاره شامل دو یا چند خبر باشد، به آن گزاره‌ی «مركب» گویند.

نمونه: عبارت «عدد 7 چهارمین عدد اول و عدد  $\sqrt{2}$  گنگ است» یک گزاره‌ی مرکب است.

### تمرین:

کدام یک از موارد زیر یک گزاره است؟

الف) آیا فردا هوا بارانی است؟

ب) مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180 درجه است.

پ) کتابت را مطالعه کن.

ت)  $2 < 3$ .

در برخورد با یک گزاره، باید یکی از دو حالت زیر در نظر گرفته شود:  
الف) اگر گزاره درست باشد، باید آن را با استدلال استنتاجی ثابت کنیم که به این استدلال، «برهان» هم گفته می‌شود.

نمونه: هم‌رس بودن ارتفاع‌ها یا نیمسازهای زوایای داخلی مثلث.

### توجه

در بین احکام درست، برخی از آن‌ها جایگاه خاصی دارند. در هندسه، گزاره‌هایی که کاربردهای زیادی داشته و برای آن‌ها برهان درستی آورده‌ایم، «قضیه» نامیده می‌شوند.  
بنابراین

**قضیه:** گزاره‌ی مهمی است که همیشه درست است.

ب) هرگاه گزاره نادرست باشد، باید برای آن‌ها مثال نقض ارائه دهیم.

### قضیه و گزاره شرطی:

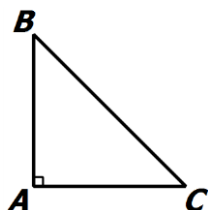
می‌توان یک گزاره را به صورت زیر بیان کرد که در این صورت به آن «گزاره شرطی» گویند.

اگر فرض، آن‌گاه حکم

اگر یک قضیه را به صورت شرطی بیان کنیم، به آن «قضیه شرطی» گفته می‌شود.

## مثال:

## قضیه فیثاغورس

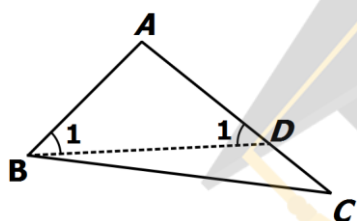


اگر مثلث  $ABC$  قائم‌الزاویه باشد، آن گاه  $BC^2 = AB^2 + AC^2$  است.

## قضیه 6:

اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، زاویه روبه‌رو به ضلع بزرگتر، بزرگ‌تر است از زاویه روبه‌رو به ضلع کوچکتر.

## اثبات:



با توجه به شکل، حکم داده شده به صورت شرطی چنین است:

اگر در مثلث  $ABC$ ،  $AC > AB$  باشد، آن گاه  $\hat{B} > \hat{C}$  است.

چون  $AC > AB$  است، می‌توان نقطه  $D$  را روی ضلع  $AC$  طوری انتخاب کرد که  $AB = AD$  باشد.

- بنابر انتخاب نقطه  $D$ ، مثلث  $ABD$  متساوی‌الساقین بوده و در نتیجه  $\hat{B}_1 = \hat{D}_1$  است. از طرفی زاویه‌ی  $\hat{B}_1$  جزئی از زاویه‌ی اصلی  $\hat{B}$  بوده و در نتیجه  $\hat{B} > \hat{B}_1$  است. لذا:

$$\begin{cases} \hat{B} > \hat{B}_1 \\ \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \end{cases} \Rightarrow \hat{B} > \hat{D}_1$$

- از طرف دیگر، زاویه‌ی  $\hat{D}_1$  برای مثلث  $DBC$  یک زاویه‌ی خارجی بوده و از زاویه‌ی غیر مجاور خود، یعنی  $\hat{C}$  بزرگ‌تر است. بنابراین:

$$\begin{cases} \hat{B} > \hat{D}_1 \\ \hat{D}_1 > \hat{C} \end{cases} \Rightarrow \hat{B} > \hat{C}$$

## نقیض گزاره:

هر گاه در یک گزاره، خبر (حکم) آن را کاملاً برعکس کنیم، نقیض آن به‌دست می‌آید.

می‌توانید برای نقیض کردن گزاره، عبارت « چنین نیست که » را به ابتدای آن اضافه کنید.

**مثال:**

نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.

الف) امروز هوا گرم است.

ب)  $a$  از  $b$  بزرگتر است.

ج) مجموع زوایای داخلی هر مثلث  $180^\circ$  است.

**پاسخ:**

الف) چنین نیست که امروز هوا گرم است. (امروز هوا گرم نیست).

ب) چنین نیست که  $a$  از  $b$  بزرگتر باشد. ( $a$  از  $b$  بزرگتر نیست).

که معادل است با « $a$  از  $b$  کوچکتر و یا با  $b$  برابر است»

ج) چنین نیست که مجموع زوایای داخلی هر مثلث  $180^\circ$  باشد.

که معادل است با «مثلثی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی آن  $180^\circ$  نیست»

**برهان خلف:**

گاهی ارائه استدلال استنتاجی به صورت عادی مشکل یا غیرممکن است. در چنین صورتی، معمولاً روش اثبات غیرمستقیم به صورت زیر، کمک بسیار زیادی می‌کند.

برای استفاده از این روش، طبق گام‌های زیر عمل می‌کنیم:

- حکم مورد نظر را نادرست در نظر می‌گیریم. یعنی: فرض می‌کنیم نقیض آن درست باشد. به این فرض جدید، «فرض خلف» هم می‌گویند.
- با توجه به فرض مرحله قبل و آوردن دلیل مناسب، به یک تناقض با فرض آن قضیه یا مسأله می‌رسیم.
- نتیجه می‌گیریم: حکم آن مسأله نمی‌تواند نادرست باشد و از ابتدا صحیح بوده است.

**مثال:**

از یک نقطه غیر واقع بر خط نمی‌توان بیش از یک عمود بر آن خط رسم کرد.

**پاسخ:**

فرض: نقطه‌ای مانند  $A$  غیر واقع بر خطی مانند  $d$  وجود دارد.

حکم: از نقطه  $A$  نمی‌توان بیش از یک عمود بر خط  $d$  رسم کرد.

استدلال: با برهان خلف (برهان غیرمستقیم) فرض می‌کنیم حکم غلط باشد. یعنی فرض می‌کنیم از نقطه  $A$  دو عمود بر خط  $d$  رسم کرده‌ایم که مانند شکل، خط  $d$  را در نقاط  $B$  و  $C$  قطع کرده‌اند. در این صورت مجموع زوایای

داخلی مثلث  $ABC$  بزرگتر از  $180^\circ$  خواهد شد و این غیر ممکن است. پس امکان رسم دو عمود از یک نقطه غیر واقع بر یک خط وجود ندارد. یعنی حکم نمی تواند غلط باشد.

### تمرین:

نشان دهید هر مثلث حداکثر یک زاویه ی باز دارد.

### عکس قضیه شرطی:

برای نوشتن عکس یک قضیه شرطی، جای فرض و حکم را عوض می کنیم.  
توجه کنید:

«عکس یک قضیه شرطی ممکن است یک قضیه نباشد، یعنی ممکن است حکمی نادرست شود.»

### مثال:

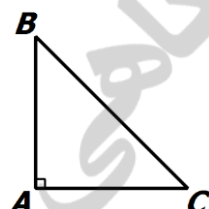
الف) حکم زیر را به صورت شرطی نوشته و تعیین کنید درست است یا نادرست؟  
«در مثلث قائم الزاویه، وتر بزرگترین ضلع است»

ب) عکس حکم فوق را نوشته و مشخص کنید درست یا نادرست است؟

### پاسخ:

الف) بیان شرطی حکم با استفاده از شکل چنین است:

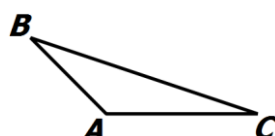
«اگر مثلث  $ABC$  قائم الزاویه باشد  $\hat{A} = 90^\circ$ ، آن گاه وتر  $BC$  از دو ضلع  $AB$  و  $AC$  بزرگتر است.»



ب) عکس گزاره:

«اگر در مثلث  $ABC$  ضلع  $BC$  از  $AB$  و  $AC$  بزرگتر باشد، آن گاه مثلث  $ABC$

قائم الزاویه است.»



این گزاره نادرست است و می توانیم برای آن مثال نقض بیاوریم:

**مثال:**

عکس قضیه زیر را بنویسید.

«اگر در یک چهار ضلعی متوازی الاضلاع باشد، آن گاه قطرهایش یکدیگر را نصف می کنند.»

**پاسخ:**

اگر در یک چهارضلعی قطرهای یکدیگر را نصف کنند، آن گاه آن چهارضلعی متوازی الاضلاع است.

**تمرین:**

عکس قضیه زیر را بنویسید.

«اگر دو ضلع از یک مثلث با هم برابر باشند، آن گاه ارتفاع های وارد بر آن دو ضلع نیز با هم برابرند.»

**قضیه دو شرطی:**

هرگاه عکس یک قضیه شرطی همواره درست باشد، آن قضیه را می توان به صورت دو شرطی بیان کرد.

فرض اگر و فقط اگر حکم

**مثال:**

قضیه فیثاغورس را به صورت یک قضیه دو شرطی بیان بنویسید.

**پاسخ:**

مثلث  $ABC$  قائم الزویه است اگر و فقط اگر  $BC^2 = AB^2 + AC^2$ .

با آرزوی موفقیت

پریسا استواری

۱۳۹۶