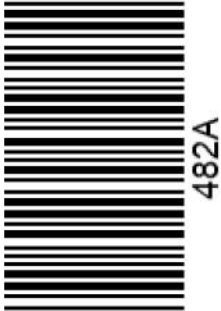


کد کنترل

482

A



آزمون ورودی دوره دکتری (نیمه متمرکز) - سال ۱۴۰۰

دفترچه شماره (۱)

صبح جمعه

۹۹/۱۲/۱۵



«اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می شود.»
امام خمینی (ره)

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
سازمان سنجش آموزش کشور

رشته - علوم کامپیوتر - (کد ۲۲۴۷)

مدت پاسخ گویی: ۱۵۰ دقیقه

تعداد سؤال: ۴۵

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	مجموعه دروس تخصصی: - ساختمان داده و الگوریتم - مبانی منطق - مبانی ترکیبیات - جبر خطی عددی - نظریه الگوریتم پیشرفته	۴۵	۱	۴۵

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

این آزمون نمره منفی دارد.

* داوطلب گرامی، عدم درج مشخصات و امضا در مندرجات جدول ذیل، به منزله عدم حضور شما در جلسه آزمون است.

اینجانب با شماره داوطلبی با آگاهی کامل، یکسان بودن شماره صندلی خود را با شماره داوطلبی مندرج در بالای کارت ورود به جلسه، بالای پاسخنامه و دفترچه سؤالات، نوع و کد کنترل درج شده بر روی دفترچه سؤالات و پائین پاسخنامه‌ام را تأیید می‌نمایم.

امضا:

۱- اگر F_k نشان دهنده k امین عدد در دنباله فیبوناچی باشد، بهترین زمان برای محاسبه F_n چیست؟

- (۱) $O(n)$ (۲) $O(n^2)$ (۳) $O(\log n)$ (۴) $O(n \log n)$

۲- در یک گراف غیر جهت‌دار با n رأس و e یال جمع درجه تمام رئوس کدام است؟

- (۱) $2n$ (۲) $2e$ (۳) $\frac{2n-2}{2}$ (۴) $\frac{2e-2}{2}$

۳- پس از اجرای قطعه کد زیر، k از چه مرتبه‌ای است؟

$k = 0$

for($i=1; i < n; i++$)

for($j=1; j < i; j = j * 2$)

$k = k + j$

- (۱) n (۲) n^2 (۳) n^3 (۴) $\frac{n^3}{2}$

۴- وقتی n عدد بزرگی باشد، در مرتب‌سازی درجی (Insertion Sort) روی n عدد تصادفی تقریباً چه تعداد مقایسه انجام می‌شود؟

- (۱) مرتبه کمتر از n^2 (۲) $\frac{2}{3}n^2$ (۳) $\frac{n^2}{2}$ (۴) $\frac{n^2}{4}$

۵- زمان اجرای الگوریتم مرتب‌سازی سریع (Quick Sort) در بدترین حالت، حالت متوسط و بهترین حالت، به ترتیب از راست به چپ عبارت است از:

- (۱) $\theta(n \log n), \theta(n \log n), \theta(n^2)$
 (۲) $\theta(n), \theta(n \log n), \theta(n^2)$
 (۳) $\theta(n \log n), \theta(n \log n), \theta(n \log n)$
 (۴) $\theta(n), \theta(n^2), \theta(n^2)$

۶- دو آرایه مرتب با طول‌های n و m داریم. کمترین تعداد مقایسه برای به دست آوردن آرایه‌ای مرتب از آن‌ها به طول $n+m$ از چه مرتبه‌ای است؟

- (۱) $O(\max\{n, m\})$
 (۲) $O(\min\{n, m\})$
 (۳) $\theta(\max\{n \log n, m \log m\})$
 (۴) $\theta(\min\{n \log n, m \log m\})$

۷- کدام مورد (موارد) درست است؟

الف - توابع $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ وجود دارند که $f + g \neq O(f)$ و $f + g \neq O(g)$

ب - اگر برای یک مسأله، الگوریتم با زمان $O(n^3)$ وجود داشته باشد آن‌گاه زمان اجرای سریع‌ترین الگوریتم این مسأله حتماً $O(n^3)$ است.

(۱) فقط (الف) (۲) فقط (ب) (۳) هر دو (۴) هیچ‌کدام

۸- چند تا از گزاره‌های زیر درست است؟

الف - یک پشته را می‌توان با دو صف پیاده‌سازی کرد.

ب - یک صف را می‌توان با دو پشته پیاده‌سازی کرد.

ج - یک پشته را می‌توان با یک لیست تک‌پیوندی پیاده‌سازی کرد.

د - یک صف را می‌توان با یک لیست تک‌پیوندی پیاده‌سازی کرد.

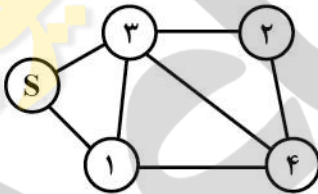
(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۹- n عدد طبیعی a_1, \dots, a_n و یک عدد t داده شده است. در جست‌وجوی دو عدد مانند a_i و a_j هستیم که $a_i + a_j = t$ بهترین زمان متوسط برای این مسأله از چه مرتبه‌ای است؟ (استفاده از جداول درهم‌سازی (Hash))

(۱) ۱ (۲) n^2 (۳) n (۴) $n \log n$

۱۰- با اجرای دو الگوریتم جست‌وجوی اول سطح (BFS) و جست‌وجوی اول عمق (DFS) روی گراف زیر، آخرین رأسی که جست‌وجو می‌شود به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

(هر دو الگوریتم از s شروع می‌شوند. همچنین اگر بین انتخاب دو رأس تفاوتی نباشد، رأس با شماره کمتر انتخاب می‌شود.)



(۱) ۴ و ۴

(۲) ۲ و ۴

(۳) ۴ و ۲

(۴) ۲ و ۲

۱۱- در رابطه با استفاده از الگوریتم **heapsort** به‌عنوان الگوریتم مرتب‌سازی کمکی در مرتب‌سازی **radix** کدام جمله درست است؟

(۱) نمی‌تواند استفاده شود چون **stable** نیست. (۲) می‌تواند استفاده شود چون **stable** است.

(۳) نمی‌تواند استفاده شود چون **inplace** نیست. (۴) می‌تواند استفاده شود چون **inplace** است.

۱۲- کدام الگوریتم‌های زیر حریصانه است؟

$a = \text{Fractional knapsack}$, $b = \text{Dijkstra}$, $c = \text{Bellman - Ford}$, $d = \text{Kruskal}$

(۱) b, c, d (۲) b, d (۳) a, b (۴) a, b, d

۱۳- اثبات زیر برای این حکم که اگر X مجموعه باشد آنگاه

$\{W \text{ خوش‌ترتیبی برای زیرمجموعه‌ای از } X \text{ است: } C = \{w\}$ نیز یک مجموعه است را در نظریه اصل موضوعی

مجموعه‌ها (ZF) در نظر بگیرید: یک خوش‌ترتیبی از X زیرمجموعه‌ای از X^2 است. هر عضو x^2 در $P(P(X))$

قرار دارد. پس هر خوش‌ترتیبی در $P(P(P(X)))$ است. در این اثبات از کدام اصول موضوع استفاده می‌شود؟

(۱) مجموعه توانی - تصریح (۲) مجموعه توانی - جایگزینی

(۳) زوج‌سازی - تصریح (۴) زوج‌سازی - جایگزینی

۱۴- فرض کنیم α و β دو فرمول و Σ یک مجموعه از فرمول‌ها در منطق گزاره‌ها باشند. کدام گزینه برای دو مورد زیر درست است؟

۱- اگر $\Sigma \models \alpha$ یا $\Sigma \models \beta$ آنگاه $\Sigma \models (\alpha \vee \beta)$.

۲- اگر $\Sigma \models (\alpha \vee \beta)$ آنگاه $\Sigma \models \alpha$ یا $\Sigma \models \beta$.

(۱) ۱ نادرست ولی ۲ درست

(۳) ۱ و ۲ هر دو درست

۱۵- زبان مرتبه اول شامل تساوی و نماد دوموضوعی محمولی p مفروض است. جملات زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\sigma_1 \equiv \exists x \exists y (x \neq y \wedge \forall z (z = x \vee z = y))$$

$$\sigma_2 \equiv [\forall x \exists y (p(x, y) \wedge \forall z (z \neq y \rightarrow \neg p(x, z)))]$$

$$\sigma_3 \equiv [\forall y \exists x (p(x, y) \wedge \forall z (z \neq x \rightarrow \neg p(z, y)))]$$

فرض کنیم u_1 مدلی برای σ_1 و u_2 مدلی برای $\sigma_2 \wedge \sigma_3$ باشد. چند تا از گزاره‌های زیر درستند؟

۱- $|u_1|$ دقیقاً دو عضو دارد.

۲- p^{u_2} یک جای‌گشت $|u_2|$ است.

۳- p^{u_2} یک رابطه روی $|u_2|$ است که برد آن $|u_2|$ است.

(۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۶- کدام مورد نقیض گزاره زیر است؟

«برای هر دو عدد n و m ، عدد k وجود دارد که $P(n, m, k)$ »

(۱) عدد n وجود دارد که به‌ازای هیچ دو عدد m و k ای گزاره‌ای $P(n, m, k)$ درست نیست.

(۲) برای هر دو عدد n و m ، عدد k وجود دارد که $\sim P(n, m, k)$

(۳) برای هر دو عدد n و m و هر عدد k داریم $\sim P(n, m, k)$

(۴) هیچ‌کدام

۱۷- کدام مورد (موارد) درست است؟

(الف) - هر مجموعه شمارای نامتناهی قابل‌افراز به نامتناهی مجموعه نامتناهی است.

(ب) - اگر a و b دو عدد اصلی نامتناهی باشند، $\aleph^{a+b} = \aleph^{\max\{a, b\}}$.

(۱) فقط (الف) (۲) فقط (ب) (۳) هر دو (۴) هیچ‌کدام

۱۸- عدد ترتیبی مجموعه مرتب زیر چند است؟

$$2 \leq 4 \leq 6 \leq \dots \leq (1, 1) \leq (1, 2) \leq \dots \leq (2, 1) \leq (2, 2) \leq \dots \leq$$

$$\leq (3, 1) \leq (3, 2) \leq \dots \leq \dots \leq 3 \leq 5 \leq 7 \leq \dots \leq 1$$

$$(1) (w+1)^2 \quad (2) (w+w^2+1)^2 \quad (3) w^2+w+1 \quad (4) 1+w+w^2+w$$

۱۹- در یک اداره ۱۲ صندلی در یک ردیف قرار داده شده است. پنج ارباب رجوع این اداره قرار است بر روی این

صندلی‌ها بنشینند. به خاطر رعایت فاصله بین هر دو نفر باید حداقل یک صندلی خالی باشد. به چند روش

می‌توان این پنج نفر را بر روی صندلی‌ها قرارداد به‌طوری‌که بین هر دو نفر حداقل یک صندلی خالی باشد؟

(۱) ۳۵ (۲) ۵۶ (۳) ۶۴ (۴) ۱۹۸

۲۰- در یک روستا ۹۱ نفر زندگی می‌کنند. فرض کنید N عددی باشد که حداقل N نفر در این روستا در یک فصل سال

و یک روز هفته (مثلاً پاییز و چهارشنبه) متولد شده‌اند، اما ممکن است هیچ $N+1$ نفری در یک فصل و یک روز

هفته متولد نشده باشند. N کدام است؟

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۲۹ (۴) هیچ‌کدام

۲۱- کدام گزینه نادرست است؟ (P_n مسیر n رأسی و C_n دور n رأسی است)

- (۱) هر گراف n رأسی با m یال حداقل $m + n - 1$ دور دارد.
 (۲) فرض کنیم G گراف ساده همبندی باشد که P_4 و C_3 زیر گراف القایی G نیستند. در این صورت G گراف کامل دوبخشی است.
 (۳) فرض کنیم P و Q دو مسیر ماکزیمم در گراف همبند G باشند. در این صورت P و Q رأس مشترک دارند.
 (۴) فرض کنیم G گراف اوپلری است و دو یال e و f در G وجود دارند که در رأسی مشترکند آن گاه G مدار اوپلری دارد که در آن e و f متولی ظاهر شوند.

۲۲- ۴ کارتن کاملاً یکسان با ظرفیت هر کارتن شش لیوان موجود است. به چند روش می توان شش لیوان با رنگ های مختلف را در این ۴ کارتن قرار داد؟

- (۱) ۱۸۷ (۲) ۶۵ (۳) ۱۸۶ (۴) ۶۴

۲۳- به چند طریق می توان ۴ خانه از یک جدول 5×7 را سیاه کرد به طوری که هر سطر و همچنین هر ستون حاوی تعداد زوجی خانه سیاه باشد؟ (همه خانه های جدول در ابتدا سفید هستند).

- (۱) $\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} \times 7 \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$
 (۲) $\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$
 (۳) $\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$
 (۴) $\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

۲۴- تعداد تصاعدهای حسابی با جملات طبیعی را که جملات اول و آخر آن به ترتیب ۳ و ۵۷۹ باشد N می نامیم. N در چه بازه ای قرار دارد؟

- (۱) $(37, +\infty)$
 (۲) $[1, 4]$
 (۳) $[5, 18]$
 (۴) $[19, 36]$

۲۵- اگر \bar{x} جواب مسئله محاسبه شده برای یک مسئله و Δx تخمین خطای \bar{x} پس از اجرای یک الگوریتم با آزمون همگرایی به صورت $\delta_2 + \|\bar{x}\| \leq \delta_1 \|\Delta x\|$ باشند، آنگاه مقادیر مناسب برای δ_1 و δ_2 در کامپیوتر مورد استفاده به ترتیب و تقریب برابرند با:

- (۱) روند عدد یک و کوچکترین عدد مثبت قابل نمایش
 (۲) کوچکترین عدد مثبت قابل نمایش و روند عدد یک
 (۳) کوچکترین عدد مثبت قابل نمایش و توان دوم روند عدد یک
 (۴) روند عدد یک و توان دوم کوچکترین عدد مثبت قابل نمایش

۲۶- فرض کنید a و b بردارهای n بعدی، $n > 1$ ، هستند و داریم $a^T c = a^T b$. در این صورت

- (۱) $a = 0, b = 0$
 (۲) $a = b = c = 0$
 (۳) $a = 0, c = 0$
 (۴) a متعامد است بر $b - c$

۲۷- ماتریس هاوس هولدر به صورت $H(u) = I - \frac{uu^T}{\beta}$ را در نظر بگیرید که در آن، $u \neq 0$ و $\beta \in \mathbb{R}$. اگر a و b به گونه‌ای باشند که $\|a\|_2 = \|b\|_2 = t > 0$ ، آنگاه u به طوری که $H(u)b = a$
 (۱) یکتاست.
 (۲) وجود دارد تنها وقتی $t = 1$.
 (۳) وجود دارد و $\beta = b^T a - a^T a$.
 (۴) وجود ندارد.

۲۸- فرض کنید ماتریس A ، $m \times m$ ، وارون پذیر است، مقدار عدد حالت (یا عدد شرطی) A با قدر مطلق دترمینان A
 (۱) ارتباط مشخصی ندارد.
 (۲) به طور مستقیم مرتبط است.
 (۳) به طور معکوس یا وارون مرتبط است.
 (۴) مرتبط است وقتی A یک ماتریس قطری باشد.

۲۹- دستگاه $Ax = b$ را در نظر بگیرید که در آن A ، $m \times n$ ، $m < n$ ، b ، $m \times 1$ ، هستند. این دستگاه
 (۱) جواب یکتا دارد اگر $m = \text{رتبه}(A)$
 (۲) جواب دارد اگر $m = \text{رتبه}(A)$
 (۳) جواب ندارد اگر $m < \text{رتبه}(A)$
 (۴) بی نهایت جواب دارد.

۳۰- تکرار i ام روش توانی برای محاسبه یک بردار ویژه ماتریس A را به صورت $x^{(i)} = Ax^{(i-1)}$ ، $i = 1, 2, \dots$ ، در نظر بگیرید. تخمین مناسب برای مقدار ویژه وابسته در مرحله i ام برابر با کدام است؟ (فرض کنید $z = x^{(i-1)}$ ، $y = x^{(i)}$)

$$\begin{array}{ll} (۱) \frac{\|z\|_2^2}{\|y\|_2} & (۲) \frac{\|y\|_2}{\|z\|_2} \\ (۳) \frac{\|z\|_2^2}{y^T z} & (۴) \frac{y^T z}{\|z\|_2^2} \end{array}$$

۳۱- تز چرچ - تورینگ چگونه است؟
 (۱) فرضیه است.
 (۲) حدس است و درستی یا نادرستی آن هنوز ثابت نشده است.
 (۳) قضیه است.
 (۴) حدسی بوده که درستی آن ثابت شده است.

۳۲- کدام گزینه حتماً صحیح است؟

$$\begin{array}{ll} (۱) P \cup NP = \text{power set}(\Sigma^*) & (۲) P \cap NP = \emptyset \\ (۳) P \subsetneq NP & (۴) \text{هیچ کدام} \end{array}$$

۳۳- کدام یک از کلاس‌های زیر فقط شامل برخی مسائل بله - خیر (yes-no) است؟

الف) NP-hard

ب) NP-complete

(۱) فقط الف) (۲) فقط ب) (۳) هر دو (۴) هیچ کدام

۳۴- فرض کنیم $NP \neq P$. کدام یک از گزاره‌های زیر درست است؟

الف) $3-SAT \notin P$ و $2-SAT \in P$

ب) $P \in$ برنامه‌ریزی صحیح و $P \notin$ برنامه‌ریزی حقیقی

(۱) فقط الف) (۲) فقط ب) (۳) هر دو (۴) هیچ کدام

۳۵- زمان اجرای چند تا از الگوریتم‌های مرتب‌سازی زیر $O(n \log n)$ است؟

Insertion Sort

Bubble Sort

Merge Sort

Quick Sort

Quick Sort تصادفی

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۳۶- مسئله A به صورت زیر تعریف شده است؟

ورودی: عدد n و اعداد طبیعی a_1, \dots, a_n و عدد t

خروجی: اعداد صحیح b_1, \dots, b_n (در صورت وجود) به طوری که $\sum_i a_i b_i = t$ و به طوری که $\sum_i |b_i|$ کمترین

مقدار ممکن شود. کدام گزینه درست است؟

(۱) مسئله A دارای الگوریتم حریصانه است.

(۲) مسئله A دارای الگوریتم موازی است.

(۳) هر مسئله‌ای که دارای الگوریتم پویا یا دینامیکی باشد دارای الگوریتم موازی نیز هست.

(۴) هیچ‌کدام از گزینه‌ها درست نیست.

۳۷- کدام گزینه را می‌توان خط ۳ شبه‌کد زیر قرار داد تا یک الگوریتم پویا (دینامیکی) برای مسئله زیر (مسئله

Subset sum) حاصل شود؟

ورودی: عدد n و اعداد طبیعی a_1, a_2, \dots, a_n و عدد طبیعی A

خروجی: $I \subseteq \{1, 2, \dots, N\}$ وجود دارد که $\sum_{i \in I} a_i = A$.

خیر: در غیراین صورت.

۱: $S = \phi$

۲: for $i = 1$ to n

۳: ?

۴: if $A \in S$

۵: return "yes"

۶: else

۷: return "no"

$S = S \cup \{a_i + x \mid j < i, x \in S\}$ (۲)

$S = S \cup \{a_i + x \mid j < i\}$ (۱)

$S = S \cup \{a_i \mid j < i\}$ (۴)

$S = S \cup \{a_i + x \mid x \in S\}$ (۳)

۳۸- الگوریتم فلوید - فولکرسون در حالتی که هر بار، مسیر افزایشی را با BFS پیدا کند NP-hard است.

همچنین الگوریتم فلوید - فولکرسون هرگونه که مسیر افزایشی را پیدا کند NP-hard است.

(در گزینه‌ها منظور از «به‌طور ضعیف»، همان Weakly و منظور از «قویا»، همان Strongly است.)

(۲) به‌طور ضعیف - قویا

(۱) قویا - به‌طور ضعیف

(۴) قویا - قویا

(۳) به‌طور ضعیف - به‌طور ضعیف

۳۹- کدام مورد (موارد) دارای الگوریتم تقریبی (approximation) با تقریب ثابت است؟

(الف) TSP (مسئله فروشنده دوره‌گرد)

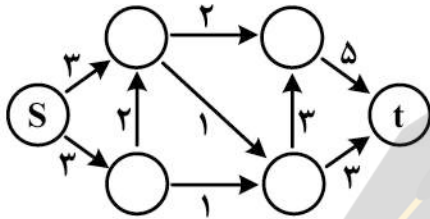
(ب) TSP متریک

(۱) فقط (الف) (۲) فقط (ب) (۳) هر دو (۴) هیچ‌کدام

۴۰- بهترین زمان لازم برای پیدا کردن دورترین دو نقطه از n نقطه داده شده روی یک خط، کدام است؟

(۱) $\theta(1)$ (۲) $\theta(n)$ (۳) $\theta(\log n)$ (۴) $\theta(n \log n)$

۴۱- بیشترین جریان از s به t در شبکه زیر چند است؟



(۱) ۳

(۲) ۴

(۳) ۵

(۴) ۶

۴۲- کدام گزاره‌های زیر درست است؟

(الف) اگر ورودی یک مسئله به صورت Online داده شود، الگوریتم‌های سریع‌تر یا با زمان برابر با حالت Offline برای آن مسئله وجود دارد.

(ب) اگر ورودی یک مسئله به صورت Offline داده شود، الگوریتم‌های سریع‌تر یا با زمان برابر با حالت Online برای آن مسئله وجود دارد.

(۱) فقط (الف) (۲) فقط (ب) (۳) هر دو درست (۴) هر دو نادرست

۴۳- کدام گزینه نادرست است؟

(۱) زمان درج یک عنصر در یک آرایه نامرتب $\theta(1)$ است.

(۲) زمان جستجوی یک عنصر در یک آرایه مرتب $\theta(\log n)$ است.

(۳) زمان حذف یک عنصر در یک جدول در هم‌سازی به‌طور متوسط $\theta(1)$ است.

(۴) زمان جستجوی یک عنصر در یک جدول در هم‌سازی به‌طور متوسط $\theta(\log n)$ است.

۴۴- با توجه به اطلاعات زیر کدام گزینه درست است؟

$$T(n) = T\left(\frac{1}{5}n\right) + T\left(\frac{4}{5}n\right) + \theta(n)$$

$$T(1) = \theta(1)$$

$$S(n) = 4S\left(\frac{1}{4}n\right) + \theta(\sqrt{n})$$

$$S(1) = 1$$

(۲) $S(n) \neq \theta(n), T(n) = \theta(n \log n)$

(۴) $S(n) \neq \theta(n), T(n) \neq \theta(n \log n)$

(۱) $S(n) = \theta(n), T(n) \neq \theta(n \log n)$

(۳) $S(n) = \theta(n), T(n) = \theta(n \log n)$

۴۵- کدام مورد (موارد) درست است؟

(الف) $P \subseteq (PR \cap ZPP)$

(ب) $ZPP \subseteq RP$

(۱) فقط (الف) (۲) فقط (ب) (۳) هر دو درست (۴) هر دو نادرست