



273F

کد کنترل

273

F

آزمون (نیمه‌متمرکز) ورود به دوره‌های دکتری - سال ۱۴۰۱

دفترچه شماره (۱)

صبح جمعه ۱۴۰۰/۱۲/۶



جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
سازمان سنجش آموزش کشور

«اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.»

امام خمینی (ره)

رشته ریاضی (کد ۲۲۳۳)

* تذکر مهم: دقت لازم در پاسخ به مواد امتحانی، رشته و زمینه‌های مورد نظر به عمل آید.

مدت پاسخ‌گویی: ۱۵۰ دقیقه

تعداد سؤال: ۷۵

عنوان مواد امتحانی

دروس کارشناسی ارشد				دروس کارشناسی						زمینه	گرایش	رشته
اصول آموزش ریاضی	پهناگیری خطی پیشرفته ۱	جبر پیشرفته ۱	آنالیز حقیقی ۱	مبانی احتمال	توپولوژی	مبانی جبر	مبانی آنالیز عددی	مبانی آنالیز ریاضی	مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی			
-	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	محض	ریاضی
✓	-	-	✓	✓	-	-	✓	✓	✓	✓	کاربردی	آموزش ریاضی

- متقاضیان رشته ریاضی، زمینه محض می‌بایستی به دروس (مبانی علوم ریاضی، مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی، مبانی آنالیز ریاضی، مبانی جبر، توپولوژی، آنالیز حقیقی ۱ و جبر پیشرفته ۱) پاسخ دهند.
- متقاضیان رشته ریاضی، زمینه کاربردی می‌بایستی به دروس (مبانی علوم ریاضی، مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی، مبانی آنالیز ریاضی، مبانی آنالیز عددی، مبانی احتمال، آنالیز حقیقی ۱ و پهناگیری خطی ۱) پاسخ دهند.
- متقاضیان رشته ریاضی، زمینه آموزش ریاضی می‌بایستی به دروس (مبانی علوم ریاضی، مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی، مبانی آنالیز ریاضی، مبانی آنالیز عددی، مبانی احتمال، آنالیز حقیقی ۱ و اصول آموزش ریاضی) پاسخ دهند.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

این آزمون نمره منفی دارد.

* متقاضی گرامی، وارد نکردن مشخصات و امضا در کادر زیر، به منزله غیبت و حضور نداشتن در جلسه آزمون است.

اینجانب با شماره داوطلبی با آگاهی کامل، یکسان بودن شماره صندلی خود را با شماره داوطلبی مندرج در بالای کارت ورود به جلسه، بالای پاسخ‌نامه و دفترچه سؤال‌ها، نوع و کد کنترل درج شده بر روی دفترچه سؤال‌ها و پایین پاسخ‌نامه‌ام را تأیید می‌نمایم.

امضا:

مبانی علوم ریاضی:

۱- نقیض گزاره زیر کدام است؟ (فرض می‌کنیم متغیرها مقید به اعداد حقیقی باشند).

اگر هر عدد بزرگتر از b از a ناکمتر باشد، آن‌گاه $a \leq b$.

$$(1) \forall x (x > b \wedge x \geq a) \wedge a > b$$

$$(2) \forall x (x > b \Rightarrow x \geq a) \wedge a > b$$

$$(3) \exists x (x > b \wedge x < a) \Rightarrow a > b$$

$$(4) \forall x (x > b \Rightarrow x \geq a) \Rightarrow a > b$$

۲- فرض کنید (X, \leq) یک مجموعه جزئاً مرتب باشد که کلاً مرتب هم هست، یعنی اعضای آن قابل قیاس هستند.

به‌ازای هر $x, y \in X$ ، بازه (x, y) را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(x, y) = \{z \in X : x \leq z \wedge z \leq y \wedge x \neq z \neq y\}$$

رابطه \sim با تعریف زیر کدام خاصیت را دارد؟

$$a \sim b \Leftrightarrow \exists x \exists y (x, y \in X \wedge a, b \in (x, y))$$

(۱) متعددی است.

(۲) پادمتقارن است.

(۳) انعکاسی (بازتابی) است.

(۴) در اصل تثلیث صدق می‌کند.

۳- فرض کنید $A = \left\{ \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m} : n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$ ، کدام گزینه درست است؟

$$(1) \min A = -1$$

$$(2) \inf A = -1$$

$$(3) \sup A = \max A = 1$$

(۴) هم بیشینه (ماکسیمم) و هم کمینه (مینیمم) دارد.

۴- تابع $f: X \rightarrow Y$ مفروض است. خاصیت $\forall A (A \subseteq X \Rightarrow f(A^c) = f(A))^c$ را به p و دوسویی بودن f را به q نمایش می‌دهیم. کدام گزینه درست است؟

(۱) p نه شرط لازم برای q است و نه شرط کافی.

(۲) p شرط کافی برای q است ولی لازم نیست.

(۳) p شرط لازم برای q است ولی کافی نیست.

(۴) شرط لازم و کافی برای p آنست که q .

۵- کدام گزینه معادل اصل انتخاب نیست؟

- (۱) هر مجموعه جزئاً مرتب یک زنجیر ماکسیمال (بیشین) دارد.
 (۲) اگر α, β دو عدد اصلی باشند، آن‌گاه $\alpha \leq \beta$ یا $\beta \leq \alpha$.
 (۳) حاصل ضرب دکارتی، هر تعداد نامتناهی از مجموعه‌های ناتهی خود ناتهی است.
 (۴) اگر $\{A_i\}_{i \in I}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های ناتهی باشد، تابعی مانند $f: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $f(i) \in A_i, i \in I$.

مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی:

۶- فرض کنید W, U زیر فضاهای متمایز ۴ بعدی از یک فضای برداری V باشند، به طوری که $\dim V = 6$. ابعاد ممکن برای $U \cap V$ کدام است؟

- (۱) ۱ یا ۲
 (۲) ۲ یا ۳
 (۳) ۳ یا ۴
 (۴) ۴

۷- چند جمله‌ای مینیمال (کمین) $m(x)$ از ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 \\ 3 & 7 & -15 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$ ، کدام است؟

- (۱) $(x-1)(x-3)$
 (۲) $(x-1)(x+2)$
 (۳) $(x-2)(x+3)$
 (۴) $(x-1)(x-3)^2$

۸- فرض کنید $V = \{(a_1, a_2, a_3, \dots) \mid a_i \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n\}$ می‌دانیم که V یک \mathbb{R} -فضای برداری است. حال تبدیل خطی $T: V \rightarrow V$ با ضابطه $T((a_1, a_2, a_3, \dots)) = (a_2, a_3, a_4, \dots)$ را در نظر بگیرید. مقادیر ویژه T در کدام گزینه است؟

- (۱) $3, -1$
 (۲) $3, -2$
 (۳) $2, -3$
 (۴) $-3, 1$

۹- فرض کنید V یک فضای برداری و $T: V \rightarrow V$ یک تبدیل خطی باشد. در این صورت $T(\ker T^2)$ برابر با کدام گزینه است؟

- (۱) $\ker T^2 \cap \text{Im } T^2$
 (۲) $\ker T \cap \text{Im } T^2$
 (۳) $\ker T \cap \text{Im } T$
 (۴) $\ker T^2 \cap \text{Im } T$

۱۰- فرض کنید V فضای برداری چند جمله‌ای‌های حداکثر از درجه 1400 با ضرایب حقیقی، روی میدان اعداد حقیقی باشد و $T: V \rightarrow V$ یک تبدیل خطی با ضابطه $T(P(x)) = P(x) - P(-x)$ باشد. در این صورت $\text{rank}(T)$ (رتبه T) برابر با کدام گزینه است؟

- (۱) 1401
 (۲) 701
 (۳) 1400
 (۴) 700

مبانی آنالیز ریاضی:

۱۱- فرض کنید $\{x_n\}$ یک دنباله بازگشتی باشد به طوری که $x_0 = 1$ و به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)x_{n-1}$.

در این صورت دنباله $\{x_n\}$:

- (۱) بی‌کران است و لذا واگرا است.
 (۲) نزولی و کراندار است و لذا همگرا است.
 (۳) کوشی نیست و لذا واگرا است.
 (۴) صعودی و کراندار است و لذا همگرا است.

۱۲- کدام گزینه درباره سری $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{1+n^2})$ درست است؟

- (۱) همگرای مطلق است.
 (۲) همگرای مشروط است.
 (۳) واگرا به بی‌نهایت است.
 (۴) دنباله مجموع جزئی آن کراندار است ولی سری واگرا است.

۱۳- فرض کنید A زیرمجموعه‌ای نامتناهی و سره از \mathbb{R} باشد و A° و ∂A به ترتیب مجموعه نقاط درونی و مرزی A باشند. کدام گزینه درست است؟

- (۱) اگر $A^\circ = \emptyset$ باشد، آنگاه $A^\circ = \emptyset$.
 (۲) اگر ∂A نامتناهی باشد، آنگاه $A^\circ = \emptyset$.
 (۳) اگر ∂A نامتناهی باشد، آنگاه $(\partial A)^\circ \neq \emptyset$.
 (۴) اگر A باز و در \mathbb{R} چگال باشد، آنگاه ∂A متناهی است.

۱۴- فرض کنید تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ به ازای هر $x, y \in \mathbb{R}$ در شرط $f(x+y) = f(x) + f(y)$ صدق کند. کدام گزینه معادل پیوستگی f بر \mathbb{R} نیست؟

- (۱) f یکنوا است.
 (۲) f بر هر بازه بسته و کراندار انتگرال‌پذیر ریمان است.
 (۳) $f|_{\mathbb{Q}^\circ}$ (تحدید f به مجموعه اعداد گنگ)، پیوسته است.
 (۴) $f|_{\mathbb{Q}}$ (تحدید f به مجموعه اعداد گویا)، پیوسته است.

۱۵- فرض کنید تابع حقیقی f بر بازه (a, b) مشتق‌پذیر باشد. کدام گزینه درست است؟

(۱) اگر f' بر (a, b) پیوسته باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ موجود است.

(۲) اگر $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ موجود باشد، آنگاه f' بر (a, b) کراندار است.

(۳) اگر f' بر (a, b) کراندار باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ موجود است.

(۴) اگر f بر (a, b) کراندار باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ موجود است.

مبانی آنالیز عددی:

۱۶- در یک دستگاه غیرشماره برای نمایش اعداد حقیقی در مبنای ۷ با ۳ رقم مانیتس و روش گرد کردن، فاصله بین عدد ۹ و نزدیکترین عدد قابل نمایش بزرگ از ۹ چقدر است؟

(۱) $\frac{1}{7}$

(۲) ۷

(۳) ۱

(۴) 7^{-3}

۱۷- λ^* جواب مسأله کمترین مربعات $\min_{\lambda} \|\lambda u - b\|_2$ که در آن $u, b \in \mathbb{R}^n$ بردارهای ناصفر متعامد بر هم هستند برابر است با

(۲) یک عدد منفی

(۱) صفر

(۴) صفر یا یک عدد منفی یا یک عدد مثبت

(۳) یک عدد مثبت

۱۸- $L_i(x)$ را تابع پایه‌ای لاگرانژ مربوط به نقاط متمایز (x_i, f_i) ، $i = 1, \dots, n+1$ ، $n \geq 1$ در نظر بگیرید. مقدار

$$\sum_{i=1}^{n+1} L_i(x)$$

(۲) ممکن است مثبت باشد.

(۱) برابر است با صفر

(۴) برابر است با یک

(۳) ممکن است منفی باشد.

۱۹- تقریب تابع لگاریتم طبیعی به صورت $f(x) = L_n x$ در بازه $[1, 2]$ با تکه‌های خطی درون‌یاب مدنظر است. این بازه دست‌کم به چند تکه مساوی تقسیم شود تا کران بالای خطای درون‌یابی برای تخمین f در سرتاسر بازه بیش از

$$10^{-4} \times \frac{1}{2} \text{ نباشد؟}$$

(۱) ۲۵

(۲) ۵۰

(۳) ۷۵

(۴) ۱۰۰

۲۰- فرض کنید $Q(x) = x^T A^T A x + 2x^T A^T b$ و A ستون‌های مستقل خطی دارد. جواب برای $\min_x Q(x)$

- (۱) لزوماً یکتا نیست.
 (۲) ممکن است موجود نباشد.
 (۳) جواب مسئله $\min_x \|Ax + b\|_2$ است.
 (۴) ممکن است جواب سراسری نباشد.

مبانی جبر:

۲۱- یادآوری می‌کنیم که حلقه R را ساده گوئیم، هرگاه ایده‌آل نابديهی نداشته باشد، و آن را اول گوئیم، هرگاه به‌ازای هر دو ایده‌آل ناصفر I و J از آن، ایده‌آل IJ نیز ناصفر باشد. فرض کنید $n \geq 2$ یک عدد طبیعی باشد. در مورد

حلقه‌های $R = M_n(\mathbb{Z})$ و $S = \frac{M_n(\mathbb{Z})}{M_n(\Delta\mathbb{Z})}$ چه می‌توان گفت؟

- (۱) S ساده و R اول است.
 (۲) S و R هر دو ساده هستند.
 (۳) R ساده و S اول است.
 (۴) S و R ساده نیستند.
- ۲۲- تعداد یک‌ریختی‌های حلقه‌ای مانند $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ که هر عدد حقیقی را ثابت نگه می‌دارند، برابر با کدام است؟

۱ (۱)

۲ (۲)

۴ (۳)

(۴) بی‌نهایت

۲۳- فرض کنید $R = \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7$ و $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{Z}_7 \right\}$. در این صورت کدام گزینه درست است؟

(۱) S و R به‌عنوان حلقه یکرختند ولی به‌عنوان گروه جمعی یکرخت نیستند.

(۲) S و R هم به‌عنوان گروه‌های جمعی و هم به‌عنوان حلقه، یکرختند.

(۳) S و R نه به‌عنوان گروه جمعی یکرختند و نه به‌عنوان حلقه.

(۴) S و R به‌عنوان گروه‌های جمعی یکرختند ولی به‌عنوان حلقه یکرختند نیستند.

۲۴- فرض کنید G یک گروه و H یک زیرگروه سره آن باشد به طوری که هر عضو خارج H ، از مرتبه ۲ است. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

(۱) H زیرگروه نرمال و آبدلی G است.

(۲) H زیرگروه نرمال G است ولی ممکن است آبدلی نباشد.

(۳) H آبدلی است ولی ممکن است زیرگروه نرمال G نباشد.

(۴) ممکن است H آبدلی نبوده و زیرگروه نرمال G نباشد.

۲۵- فرض کنید G گروهی باشد که هر زیرگروه دو مولدی آن دوری است. در این صورت کدام گزینه نادرست است؟

(۱) G آبدلی است.

(۲) هر زیرگروه G نرمال است.

(۳) هر زیرگروه سره G دوری است.

(۴) هر عضو G از مرتبه متناهی است یا در غیراین‌صورت هر عضو غیربديهی G از مرتبه نامتناهی است.

توپولوژی:

۲۶- فرض کنید τ_1 و τ_2 دو توپولوژی روی مجموعه X باشند به طوری که $\tau_1 \subseteq \tau_2$. در چه صورت $\tau_1 = \tau_2$ ؟

(۱) هر دنباله τ_2 -همگرا، τ_1 -همگرا نیز باشد.

(۲) (X, τ_1) هاوسدورف و (X, τ_2) فشرده باشد.

(۳) هر مجموعه τ_2 -فشرده، τ_1 -فشرده نیز باشد.

(۴) (X, τ_1) فشرده و (X, τ_2) هاوسدورف باشد.

۲۷- فرض کنید X و Y فضاهای توپولوژیک هاوسدورف باشند و X موضعاً فشرده باشد. کدام گزینه نادرست است؟

(۱) هر زیر مجموعه باز X با توپولوژی نسبی موضعاً فشرده است.

(۲) هر زیر مجموعه بسته X با توپولوژی نسبی موضعاً فشرده است.

(۳) اگر تابع $f: X \rightarrow Y$ پیوسته باشد، آنگاه $f(X)$ با توپولوژی نسبی موضعاً فشرده است.

(۴) اگر Y با زیرمجموعه‌ای باز از یک فضای هاوسدورف فشرده همسان‌ریخت باشد، آنگاه Y موضعاً فشرده است.

۲۸- فرض کنید (X, τ) یک فضای توپولوژیک همبند با بیش از یک نقطه باشد. ضعیف‌ترین شرط روی X که ناشمارا بودن آن را ایجاب می‌کند، کدام است؟

(۱) منظم

(۲) نرمال

(۳) هاوسدورف

(۴) متریک‌پذیری

۲۹- فرض کنید τ توپولوژی اقلیدسی بر $[0, 1]$ است و $X = [0, 1] \cup \mathbb{N}$. توپولوژی زیر را بر X در نظر بگیرید:

$$\tau^* = \tau \cup \{[0, 1] \cup A : A \subseteq \mathbb{N}\}$$

در این صورت کدام گزینه نادرست است؟

(۱) τ^* هاوسدورف است.

(۲) τ معادل با توپولوژی نسبی τ^* بر $[0, 1]$ است.

(۳) $[0, 1]$ زیرمجموعه فشرده (X, τ^*) است.

(۴) $[0, 1]$ در (X, τ^*) چگال است.

۳۰- فرض کنید (X, τ_X) و (Y, τ_Y) فضاهای توپولوژیک هستند و $f: X \rightarrow Y$ یک تابع پوشاست به طوری که برای

هر $V \subseteq Y$ ، $f^{-1}(V)$ باز است اگر و تنها اگر V باز باشد. کدام گزینه درست است؟

(۱) τ_X ضعیف‌ترین توپولوژی روی X است که f نسبت به آن پیوسته است.

(۲) τ_X قوی‌ترین توپولوژی روی X است که f نسبت به آن پیوسته است.

(۳) τ_Y ضعیف‌ترین توپولوژی روی Y است که f نسبت به آن پیوسته است.

(۴) τ_Y قوی‌ترین توپولوژی روی Y است که f نسبت به آن پیوسته است.

مبانی احتمال:

۳۱- اگر A و B دو پیشامد باشند به طوری که $P(A|B') = \frac{1}{2}$ و $P(B|A) = \frac{2}{5}$ ، مقدار $\frac{P(B')}{P(A)}$ ، کدام است؟

(۱) $\frac{3}{5}$

(۲) $\frac{6}{5}$

(۳) $\frac{5}{6}$

(۴) $\frac{5}{3}$

۳۲- فردی دارای دو سکه است. یکی از سکه‌ها سالم است، یعنی دارای دو وجه شیر و خط است که احتمال وقوع هر یک از آن‌ها $\frac{1}{2}$ است. هر دو روی سکه دیگر شیر است. یک سکه به تصادف انتخاب و دوبار پرتاب می‌شود. اگر نتیجه هر دو پرتاب شیر باشد، احتمال آنکه سکه سالم انتخاب شده باشد چقدر است؟

(۱) $\frac{1}{5}$

(۲) $\frac{1}{3}$

(۳) $\frac{1}{2}$

(۴) $\frac{2}{3}$

۳۳- اگر نسبت میانه به مُد (نما) ۲ باشد، نسبت میانگین به مُد تقریباً چند است؟

(۱) $\frac{3}{5}$

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) $\frac{2}{5}$

۳۴- یک جعبه شامل ۱۰۰۰ لامپ روشنایی است. احتمال اینکه حداقل یک لامپ معیوب وجود داشته باشد برابر با ۰٫۱ و احتمال اینکه حداقل دو لامپ معیوب وجود داشته باشد ۰٫۰۵ است. احتمال اینکه حداکثر یک لامپ معیوب در جعبه وجود داشته باشد، کدام است؟

(۱) ۰٫۰۵

(۲) ۰٫۱

(۳) ۰٫۹

(۴) ۰٫۹۵

۳۵- داده‌های سرعت حرکت ۳۰ پرتابه و داده‌های وزن ۴۵ بسته پسته یک تولیدکننده در اختیار هستند. اگر بخواهیم میزان پراکندگی این دو مجموعه از داده‌ها را با هم مقایسه کنیم، کدام آماره (شاخص) زیر برای این منظور مناسب‌تر است؟

(۲) نیم‌برد چارکی

(۱) انحراف معیار

(۴) میانگین قدر مطلق انحراف‌ها

(۳) ضریب تغییرات

آنالیز حقیقی ۱:

۳۶- فرض کنید (X, μ) یک فضای اندازه باشد که $\mu(X) = 1$ و A_1, A_2, \dots, A_N زیرمجموعه‌های متمایز اندازه‌پذیر

X باشند به طوری که $\sum_{n=1}^N \mu(A_n) > N-1$. در این صورت کدام گزینه درست است؟

$$(1) \mu\left(\bigcap_{n=1}^N A_n\right) > 0$$

$$(2) \mu\left(\bigcap_{n=1}^N A_n\right) = 0 \text{ ولی } \bigcap_{n=1}^N A_n \neq \emptyset$$

$$(3) \text{ هر دو مجموعه متمایز } A_m \text{ و } A_n \text{ اشتراک دارند ولی ممکن است } \bigcap_{n=1}^N A_n = \emptyset$$

$$(4) \text{ اشتراک } N-1 \text{ مجموعه از } A_n \text{ ها ناتهی است ولی ممکن است } \bigcap_{n=1}^N A_n = \emptyset$$

۳۷- فضای \mathbb{R} را با اندازه لبگ m و فضای \mathbb{R}^2 را با اندازه لبگ m^2 در نظر بگیرید و فرض کنید $A, B \subseteq \mathbb{R}$ ناتهی باشند. کدام گزینه درست است؟

$$(1) \text{ اگر } m^2(A \times B) = 0 \text{ آنگاه } A \text{ و } B \text{ اندازه‌پذیر هستند.}$$

$$(2) \text{ اگر همه زیرمجموعه‌های } A \text{ اندازه‌پذیر باشند، آنگاه همه زیرمجموعه‌های } A \times B \text{ هم اندازه‌پذیر هستند.}$$

$$(3) \text{ اگر } m(A) = 0 \text{ و } A \times B \text{ اندازه‌پذیر باشد، آنگاه } m(B) < \infty$$

$$(4) \text{ اگر همه زیرمجموعه‌های } A \times B \text{ اندازه‌پذیر باشند، آنگاه همه زیرمجموعه‌های } A \text{ هم اندازه‌پذیر هستند.}$$

۳۸- فرض کنید m اندازه لبگ روی \mathbb{R} است و $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ دو تابع باشند به طوری که برای هر $a \in \mathbb{R}$

$$m(\{x: f(x) < a\} \cap \{x: a < g(x)\}) = 0$$

$$(1) \text{ همواره } m(\{x: f(x) < g(x)\}) = 0$$

$$(2) \text{ برای برقراری تساوی } m(\{x: f(x) < g(x)\}) = 0 \text{ ضروری است هر دو تابع } f \text{ و } g \text{ اندازه‌پذیر باشند.}$$

$$(3) \text{ برای برقراری تساوی } m(\{x: f(x) < g(x)\}) = 0 \text{ ضروری است هر دو تابع } f \text{ و } g \text{ دارای برد شمارا باشند.}$$

$$(4) \text{ برای برقراری تساوی } m(\{x: f(x) < g(x)\}) = 0 \text{ ضروری است هر دو تابع } f \text{ و } g \text{ هم اندازه‌پذیر و هم دارای}$$

برد شمارا باشند.

۳۹- فرض کنید C مجموعه کانتور است و توابع $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه‌های زیر تعریف شوند.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in C \\ 1 & x \notin C \end{cases}, \quad g(x) = x^2$$

اگر μ یک اندازه بورل روی \mathbb{R} باشد که تحت انتقال پایا است و $\int_{[0,1]} g d\mu = 3$ ، آنگاه کدام گزینه درست است؟

(۱) $\int_{[0,1]} f d\mu = 0$

(۲) $\int_{[0,1]} f d\mu = 3$

(۳) $\int_{[0,1]} f d\mu = 9$

(۴) $\int_{[0,1]} f d\mu$ موجود نیست.

۴۰- فرض کنید (X, μ) یک فضای اندازه و برای هر n, f_n و f توابعی نامنفی و انتگرال پذیر بر X باشند که تقریباً همه جا

$$f_n \rightarrow f \text{ و برای هر } n, \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu = 1. \text{ کدام شرط برای برقراری تساوی } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \left(f_n^{\frac{1}{2}} - f^{\frac{1}{2}} \right)^2 d\mu = 0 \text{ ضروری است؟}$$

(۱) باید همگرایی $f_n \rightarrow f$ بر X یکنواخت باشد. (۲) باید دنباله $\{f_n\}$ صعودی یا نزولی باشد.

(۳) باید از مرتبه‌ای به بعد $f_n = f$. (۴) هیچ شرطی ضروری نیست.

۴۱- فرض کنید $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی کراندار باشد. در این صورت کدام گزینه درست است؟

(۱) اگر f انتگرال پذیر لیگ باشد، انتگرال پذیر ریمان هم هست.

(۲) ممکن است f اندازه پذیر باشد، ولی انتگرال پذیر لیگ نباشد.

(۳) اگر $|f|$ انتگرال پذیر لیگ باشد، آنگاه f انتگرال پذیر ریمان است.

(۴) ممکن است $|f|$ انتگرال پذیر لیگ باشد ولی f انتگرال پذیر لیگ نباشد.

۴۲- فرض کنید (X, μ) یک فضای اندازه و برای هر n, f_n و f توابع اندازه پذیر بر X باشند، به طوری که $\int_X |f_n - f|^2 d\mu \rightarrow 0$

کدام گزینه نادرست است؟

(۱) $\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$

(۲) $f_n \xrightarrow{\mu} f$ (همگرایی در اندازه)

(۳) برای هر $g \in L^2(\mu)$ ، $\int_X f_n g d\mu \rightarrow \int_X f g d\mu$

(۴) زیر دنباله $\{f_{k_n}\}$ از $\{f_n\}$ وجود دارد به طوری که $f_{k_n} \rightarrow f$ (a.c.)

۴۳- کدام یک از مجموعه‌های زیر در فضای $L_1([0, 1])$ بسته است؟

$$(1) L_p([0, 1])$$

$$(2) C([0, 1])$$

$$(3) A = \{f \in L_p([0, 1]) : \|f\|_1 \leq 1\}$$

$$(4) B = \{f \in L_1([0, 1]) : |f| \leq \varphi \text{ (a.e.)}\}$$
 که φ تابعی مثبت است.

۴۴- فرض کنید $T: X \rightarrow Y$ یک عملگر خطی بین فضاهای باناخ X و Y باشد، کدام گزینه نادرست است؟

(۱) عملگر T کراندار است اگر در صفر پیوسته باشد.

(۲) عملگر T در صورتی کراندار است که نمودار T (گراف T) در $X \times Y$ بسته باشد.

(۳) اگر عملگر T دوسویی و پیوسته باشد، ممکن است T^{-1} پیوسته نباشد.

(۴) اگر عملگر T کراندار و پوشا باشد، آنگاه T مجموعه‌های باز را به مجموعه‌های باز می‌نگارد.

۴۵- فرض کنید H یک فضای هیلبرت و $\{x_i\}_{i \in I}$ خانواده‌ای نامشمارا و یکامتعامد در H باشد. اگر $x \in H \setminus \{0\}$ و

(x_i, x) ضرب درونی x و x_i باشد، آنگاه کدام گزینه نادرست است؟

$$(1) \sum_{i \in I} |(x_i, x)|^2 \leq \|x\|^2$$

$$(2) \sum_{i \in I} |(x_i, x)| \leq \|x\|$$

(۳) مجموعه $\{i \in I : (x_i, x) = 0\}$ نامتناهی است.

(۴) دنباله‌ای از خانواده $\{x_i\}_{i \in I}$ مانند $\{x_{i_n}\}$ یافت می‌شود که $(x_{i_n}, x) \rightarrow 0$ به عنوان $n \rightarrow \infty$.

جبر پیشرفته ۱:

۴۶- فرض کنید R یک حلقه جابه‌جایی و یکدار است. کدام گزینه نادرست است؟

(۱) اگر R حلقه‌ای آرتینی باشد، آنگاه $R[x]$ حلقه‌ای آرتینی است.

(۲) اگر R حلقه‌ای نوتری باشد، آنگاه $R[x]$ حلقه‌ای نوتری است.

(۳) اگر R حلقه‌ای نوتری باشد، آنگاه $R[x, y]$ حلقه‌ای نوتری است.

(۴) اگر $R[x]$ حلقه‌ای آرتینی باشد، آنگاه R حلقه‌ای آرتینی است.

۴۷- اگر $M = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z})$ و $N = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ ، آنگاه کدام یک از بکریختی‌های زیر به‌عنوان

\mathbb{Z} -مدول درست است؟

$$(1) M \cong N \cong \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}$$

$$(2) N = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z} \text{ و } M = \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}$$

$$(3) M \cong N \cong \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}$$

$$(4) N = \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z} \text{ و } M = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}$$

۴۸- کدام گزینه درست است؟ (به‌عنوان یکریختی گروه‌های آبدلی)

(۱) $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{1400}, \mathbb{Z}_{1402}) \cong \langle 0 \rangle$

(۲) $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{1400}, \mathbb{Z}_{1402}) \cong \mathbb{Z}_{1400}$

(۳) $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{1400}, \mathbb{Z}_{1402}) \cong \mathbb{Z}_{1402}$

(۴) $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{1400}, \mathbb{Z}_{1402}) \cong \mathbb{Z}_2$

۴۹- در مورد \mathbb{Z} -مدول $\mathbb{Q}[x] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[x]$ ، کدام گزینه درست است؟

(۱) نه تصویری است و نه تزریقی

(۲) هم تصویری است و هم تزریقی

(۳) تصویری است ولی تزریقی نیست.

(۴) تزریقی است ولی تصویری نیست.

۵۰- فرض کنید $a \in \mathbb{Z}_{28} \neq 0$ و به ازای هر \mathbb{Z}_{28} -مدول ساده مانند M داشته باشیم $aM = 0$. در این صورت a برابر

کدام مورد است؟

(۱) ۱۴

(۲) ۱۵

(۳) ۱۶

(۴) ۱۷

۵۱- تعداد اعضای $J(\mathbb{Z}_{1400})$ کدام گزینه است؟ ($J(R)$ ، رادیکال جیکوبسن حلقه R می‌باشد.)

(۱) ۲۰

(۲) ۲۵

(۳) ۵۶

(۴) ۱۰۰

۵۲- اگر M یک \mathbb{Z}_{10} -مدول آرتینی آزاد باشد، آنگاه کدام گزینه در مورد M به‌عنوان \mathbb{Z} -مدول درست است؟

(۱) نه نوتری است و نه آرتینی

(۲) هم نوتری است و هم آرتینی

(۳) نوتری نیست ولی آرتینی است.

(۴) نوتری است ولی آرتینی نیست.

۵۳- فرض کنید R حلقه‌ای یکدار و $f: R \rightarrow R$ تابعی باشد که به‌ازای هر $a, b \in R$ ، در شرایط زیر صدق می‌کند:

۱) $f(a+b) = f(a) + f(b)$ ، ۲) $f(ab) = f(b)f(a)$ ، ۳) $f(f(a)) = a$

در این صورت کدام گزینه در مورد رادیکال جیکوبسن R درست است؟

(۱) $f(J(R)) = J(R)$

(۲) $J(R) \subsetneq f(J(R))$

(۳) $f(J(R)) \subsetneq J(R)$

(۴) بستگی به حلقه R دارد و ممکن است هر یک از حالات مذکور در گزینه‌های دیگر رخ دهد.

۵۴- $\mathbb{C}[x]$ -مدول $\left(\frac{\mathbb{C}[x]}{\langle x^2 \rangle}, \frac{\mathbb{C}[x]}{\langle x \rangle} \right)$ ، با کدام گزینه یکریخت است؟

(۱) صفر

(۲) $\frac{\mathbb{C}[x]}{\langle x^2 \rangle}$

(۳) $\frac{\mathbb{C}[x]}{\langle x \rangle}$

(۴) $\frac{\langle x \rangle}{\langle x^2 \rangle}$

۵۵- فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی و یک‌دار و تنها دارای یک ایده‌آل ماکسیمال باشد که به‌عنوان $-R$ مدول تزریقی است. اگر I و J ایده‌آل‌هایی از R باشند که $I \cap J = (0)$ ، آنگاه کدام گزینه نادرست است؟

(۱) $\frac{R}{I}$ یا $\frac{R}{J}$ ، یک $-R$ مدول آزاد است.

(۲) یک $-R$ هم‌ریختی $\psi: R \rightarrow \frac{R}{I} \oplus \frac{R}{J}$ وجود دارد که یک به یک است.

(۳) یک $-R$ هم‌ریختی $\phi: \frac{R}{I} \oplus \frac{R}{J} \rightarrow R$ وجود دارد که پوشاست.

(۴) $\frac{R}{I}$ یا $\frac{R}{J}$ ، یک $-R$ مدول تصویری است ولی آزاد نیست.

بهینه‌سازی خطی پیشرفته ۱:

۵۶- اگر برای مسئله

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= c^T x \\ \text{s.t. } Ax &\geq b \end{aligned}$$

با $b \leq 0$ داشته باشیم: $Ax \geq b \Rightarrow c^T x \leq 0$ آنگاه

(۱) $v \geq 0$ وجود دارد به‌طوری‌که $A^T v \leq c$

(۲) $v \geq 0$ وجود دارد به‌طوری‌که $A^T v \geq c$

(۳) $v \geq 0$ وجود دارد به‌طوری‌که $A^T v = c^T$

(۴) $v \leq 0$ وجود دارد به‌طوری‌که $A^T v = c$

۵۷- مسئله (P) را به‌صورت

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= \sum_{i=1}^n x_i \\ \text{s.t. } Ax &= 0 \quad (P) \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

در نظر بگیرید که در آن، A ، $m \times n$ داده شده است. دوگان (D) را بنامید. اگر (P) جواب شدنی $x \neq 0$ داشته باشد، آنگاه

(۱) (P) بی‌کران است.

(۲) (D) بی‌کران است.

(۳) (P) و (D) هر دو بی‌کران هستند.

(۴) (P) و (D) جواب‌های بهینه دارند.

۵۸- فرض کنید برای مسئله برنامه‌ریزی خطی به صورت

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= c^T x \\ \text{s.t. } Ax &= b \quad (P) \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

جواب بهینه X^* با پایه بهینه B در دست است. بردار c را با $d \neq c$ جایگزین کنید. قرار دهید $\bar{y}_j = d_B^T B^{-1} a_j - d_j$ به ازای هر j . گزینه درست را انتخاب کنید.

(۱) \bar{y}_j ، به‌ازای هر j به‌طوری که x متغیر غیرپایه‌ای، آزاد است.

(۲) $\bar{y}_j \leq 0$ ، به‌ازای هر j

(۳) $\bar{y}_j \geq 0$ ، به‌ازای هر j

(۴) $\bar{y}_j \neq 0$ ، به‌ازای هر j

۵۹- برای مسئله (P) به صورت

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= c^T x \\ \text{s.t. } Ax &= b \quad (P) \\ 0 &\leq x \leq u \end{aligned}$$

گزینه درست را انتخاب کنید.

(۱) (P) می‌تواند بی‌کران باشد.

(۲) (P) می‌تواند ناشدنی باشد ولی دوگان (P) شدنی است.

(۳) (P) همواره شدنی است و جواب بهینه دارد.

(۴) (P) و دوگان (P) هر دو می‌توانند ناشدنی باشند.

۶۰- فرض کنید یک مسئله (P) به صورت

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= c^T x \\ \text{s.t. } Ax &= b \quad (P) \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

دارای جواب بهینه است. قید جدید $d^T x = h$ را به (P) اضافه کنید و مسئله جدید را (P') بنامید. گزینه درست را انتخاب کنید.

(۱) (P') همواره جواب بهینه دارد.

(۲) (P') می‌تواند بی‌کران باشد.

(۳) (P') یا ناشدنی است یا جواب بهینه دارد.

(۴) دوگان (P') نمی‌تواند بی‌کران باشد.

۶۱- مسئله اولیه (P) را به صورت

$$\begin{aligned} \text{Max } t &= b^T y + L^T v + U^T w \\ \text{s.t. } A^T y + v + w &= c \quad (P) \\ v &\geq 0 \\ w &\leq 0 \end{aligned}$$

در نظر بگیرید و دوگان آن را (D) بنامید. گزینه درست را انتخاب کنید.

(۱) (D) همواره شدنی است.

(۲) (D) همواره جواب بهینه دارد.

(۳) (P) بی‌کران است، اگر (D) ناشدنی باشد.

(۴) (D) و (P) هر دو ناشدنی هستند.

۶۲- مسئله (P) را به صورت

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, n \quad (1) \\ & \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = 1, \dots, n \quad (2) \\ & x_{ij} \geq 0, \quad i, j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (P)$$

در نظر بگیرید و دوگان آن را (D) بنامید. متغیرهای دوگان مربوط به قید i ام در (1) و قید j ام در (2) را به ترتیب u_i و v_j بگیرید. اگر x و (u, v) به ترتیب برای (P) و (D) نقاط بهینه‌کننده باشند، آنگاه

(1) $u_i + v_j \geq 1$ ، به ازای هر i و j

(2) $u_i + v_j = 1$ یا $x_{ij} = 0$ ، به ازای هر i و j

(3) $u_i + v_j = 1$ یا $x_{ij} \neq 0$ ، به ازای هر i و j

(4) $u_i + v_j \leq 1$ یا $x_{ij} > 0$ ، به ازای هر i و j

۶۳- مسئله برنامه‌ریزی خطی (P) را که در آن، $A = -A^T$ در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= c^T x \\ \text{s.t. } Ax &\leq c \quad (P) \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

گزینه درست را در مورد مسئله (P) انتخاب کنید.

(1) ناشدنی است.

(2) یا بی‌کران است یا ناشدنی است.

(3) یا ناشدنی است یا بی‌کران است یا جواب بهینه دارد.

(4) یا ناشدنی است یا جواب بهینه دارد.

۶۴- مسئله‌های برنامه‌ریزی خطی (P) و (R) را به صورت‌های زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= c^T x \\ \text{s.t. } Ax &= b \quad (P) \\ x &\geq 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} \text{Min } t &= c^T x + M \sum_{i=1}^n y_i \\ \text{s.t. } Ax + y &= b \quad (R) \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

اگر (P) جواب بهینه با مقدار z^* داشته باشد، آنگاه (R)

(1) می‌تواند ناشدنی باشد.

(2) می‌تواند به ازای برخی $M > 0$ بی‌کران باشد.

(3) می‌تواند به ازای برخی $M > 0$ جواب بهینه با مقدار بهینه بیشتر از z^* داشته باشد.

(4) به ازای هر $M > 0$ ، جواب بهینه با مقدار بهینه نایب‌تر از z^* دارد.

۶۵- مسئله برنامه‌ریزی خطی استاندارد را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= c^T x \\ \text{s.t. } Ax &= b \quad (P) \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

فرض کنید $x > 0$ و $s > 0$ وجود دارند به طوری که $Ax = b$ و $A^T y + s = c$ ، بازای برخی y . گزینه درست را انتخاب کنید.

- (۱) جواب بهینه دارد. (P)
 (۲) می‌تواند بی‌کران باشد. (P)
 (۳) دوگان (P) می‌تواند ناشدنی باشد.
 (۴) دوگان (P) می‌تواند بی‌کران باشد.

اصول آموزش ریاضی:

- ۶۶- آخرین رویکرد قالب جهانی در تولید برنامه درسی ریاضی قبل از «استانداردهای هسته مشترک برنامه درسی ریاضی» (Common Core Mathematics Curriculum Standards)، کدام بود؟
- (۱) استانداردهای برنامه درسی ریاضی
 (۲) رویکرد حل مسئله
 (۳) دوره ریاضی جدید
 (۴) نهضت رجعت به اصول
- ۶۷- منظور از واژه «فروم» در آموزش ریاضی، چیست؟
- (۱) فرایند ریاضی
 (۲) عبارتی موهوم در ریاضی
 (۳) مفهوم ریاضی
 (۴) دربرگیرنده فرایند و مفهوم ریاضی
- ۶۸- رشته «آموزش ریاضی»، مولود کدام یک از دیسپلین‌های دانشگاهی بود؟
- (۱) علوم تربیتی
 (۲) روان‌شناسی
 (۳) ریاضی
 (۴) فلسفه
- ۶۹- سازمان اصلی متولی آموزش ریاضی در جهان، کدام یک از موردهای زیر است؟
- (۱) کنگره بین‌المللی آموزش ریاضی (ICME)
 (۲) اتحادیه بین‌المللی / جهانی ریاضی (IMU)
 (۳) کمیسیون بین‌المللی تدریس ریاضی (ICMI)
 (۴) گروه بین‌المللی روان‌شناسی آموزش ریاضی (PME)
- ۷۰- از نظر ریچارد اسکمپ، دو مؤلفه اصلی نظریه «یادگیری هوشمند» در آموزش ریاضی، کدامند؟
- (۱) فهم رویه‌ای و فهم معنادار
 (۲) فهم ابزاری و فهم رابطه‌ای
 (۳) فهم رابطه‌ای و فهم طوطی‌وار
 (۴) فهم عمیق و فهم کاربست قواعد
- ۷۱- از نظر هیگنسون (۱۹۸۱)، اصول آموزش ریاضی توسط کدام چهار گروه زیر تبیین می‌شوند؟
- (۱) ریاضی‌دانان، معلمان، آموزشگران معلمان و پژوهشگران آموزش ریاضی
 (۲) معلمان، آموزشگران معلمان، سیاست‌گذاران و پژوهشگران آموزش ریاضی
 (۳) ریاضی‌دانان، تدوین‌کنندگان برنامه درسی، معلمان و آموزشگران معلمان ریاضی
 (۴) معلمان، تدوین‌کنندگان برنامه درسی، آموزشگران معلمان و پژوهشگران آموزش ریاضی
- ۷۲- در رویکرد یادگیری «آموزش ریاضیات واقعیت‌مدار»، ریاضی چگونه تبیین شده است؟
- (۱) ریاضی یک فعالیت انسانی است.
 (۲) ریاضی قطعیت است.
 (۳) ریاضی دانش پیشینی است.
 (۴) ریاضی مستقل از زمینه دنیای واقعی است.

۷۳- کدام گزینه، دامنهٔ فعالیت‌های آموزشگران ریاضی را توضیح می‌دهد؟

- ۱) تدریس ریاضی، به‌کارگیری نظریه‌ها در پژوهش‌های آموزش ریاضی
- ۲) تبیین نظریه‌های جدید یادگیری ریاضی، توسعه حرفه‌ای معلمان ریاضی
- ۳) تدوین برنامه‌های درسی ریاضی، تبیین نظریه‌های جدید یادگیری ریاضی
- ۴) هر سه مورد صحیح است.

۷۴- با شیوع همه‌گیری کووید - ۱۹ و فراگیر شدن آموزش مجازی در جهان، «فناوری‌های دیجیتال» در فرایند تدریس و یادگیری ریاضی، چه تغییری ایجاد کرده است؟

- ۱) تغییر نقش فناوری دیجیتال از ابزاری در خدمت تدریس و یادگیری ریاضی، به رسانهٔ یادگیری
- ۲) تغییر نقش معلم ریاضی کلاس درس از منبع اصلی تدریس به کاربر فناوری دیجیتال
- ۳) تغییر رویکرد به ارزشیابی ریاضی از آزمون‌های تشریحی به آزمون‌های چندگزینه‌ای آنلاین
- ۴) مناسب‌سازی برنامهٔ درسی ریاضی موجود برای آموزش مجازی

۷۵- آئن بیساپ، دو مؤلفه را در آموزش ریاضی مطرح کرد تا این ادعا را که «ریاضی یک زبان بین‌المللی» است و در همه جا، یک و تنها یک روش ارائه دارد، به چالش بکشد. این دو مؤلفه کدامند؟

- ۱) حل مسئله و فرهنگ‌ها
- ۲) فرهنگ‌ها و ارزش‌ها
- ۳) بازنمایی‌ها و ارزش‌ها
- ۴) ارزش‌ها و مسائل دنیای واقعی





